

КОМПЛЕКСНАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

(Априорные двойственные оценки и итеративные методы)

Л. С. ПРЕСМАН

(Москва)

«Комплексной» будем называть транспортную задачу

$$\sum_{nij} c_{ij}^n x_{ij}^n \rightarrow \min; \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j \in J_n} x_{ij}^n &\leq a_i^n, \quad i \in I_n, \\ \sum_{i \in I_n} x_{ij}^n &= b_j^n + \sum_{m \leq n} a_{nm} \sum_{k \in J_m} x_{jk}^m, \quad j \in J_n, \end{aligned} \right\} n = 1, \dots, N. \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} x_{ij}^n &\geq 0, \quad i \in I_n, j \in J_n, \\ J_n &= I_m \text{ для } m \in \{m \mid m < n, a_{nm} > 0\}, \end{aligned} \right\} n = 1, \dots, N. \quad (3)$$

$$(4) \quad x_{ij}^n \geq 0, \quad i \in I_n, j \in J_n, \quad (5)$$

Экономический смысл ее таков. В узлах некоторой транспортной сети происходит процесс производства и потребления, а на дугах — процесс перевозок нескольких взаимосвязанных продуктов с номерами $1, \dots, N$. Связь заключается в том, что каждый продукт с номером m ($1 \leq m \leq N$) изготавливается только при участии группы некоторых других продуктов с номерами $n \geq m$ и заданными нормами расхода a_{nm} (единиц n -го продукта на единицу m -го продукта). Некоторые a_{nm} могут быть равны нулю. Это означает, что n -й продукт не участвует в производстве m -го продукта.

Например, будем везде предполагать, что $a_{nn} = 0$. Требуется найти наиболее дешевый при заданных ценах c_{ij}^n план перевозок всех продуктов, чтобы вывоз каждого продукта n из каждого узла i его производства ($\{i\}_n = I_n$) не превышал допустимой мощности производства a_i^n , а ввоз каждого продукта n в каждый узел j -го спроса ($\{j\}_n = J_n$) был не меньше товарной b_j^n и производственной $\sum_{m \leq n} a_{nm} \sum_{k \in J_m} x_{jk}^m$ потребности продукта

в этом узле.

Каждый узел возможного производства m -го продукта является в то же время узлом возможного спроса тех n -х продуктов ($n > m$), для которых $a_{nm} > 0$ и наоборот.

Все узлы сети имеют единую нумерацию независимо от происходящих в них процессов, и каждый производитель n -го продукта соединен дугой с каждым потребителем этого продукта.

Пример: задача размещения производства комплекса взаимосвязанных продуктов с линейными производственными и транспортными затратами и ограничениями по мощности производства в некоторых узлах. Эта задача возникает и при анализе каждого варианта в таких моделях раз-

мещения комплексного производства, когда мощности новых предприятий являются дискретными переменными.

Приведем без доказательства (оно простое) критерий разрешимости задачи (1) — (5)

$$\sum_{i \in I_n} a_i^n \geq \sum_{j \in J_n} b_j^n + \sum_{m \leq n} \alpha_{nm} B_m = B_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

Будем считать, что

$$\left. \begin{aligned} a_i^n &> 0, & i \in I_n \\ b_j^n &\geq 0, & j \in J_n \end{aligned} \right\} n = 1, \dots, N.$$

Если $\sum_{i \in I_n} a_i^n = B_n$ для всех n , то задача (1) — (5) распадается на N обычных транспортных задач, поскольку тогда $\sum_{k \in J_n} x_{ik}^m = a_j^m$ для всех m . Будем предполагать, что для всех m , для которых $\alpha_{nm} > 0$ при некоторых $n > m$, имеет место $\sum_{i \in J_n} a_i^m > B_m$. Это не ограничивает общности.

В самом деле, пусть для некоторого такого m $\sum_{i \in I_m} a_i^m = B_m$; тогда в условиях (2) для данного m будут равенства для всех $i \in I_m$, а это дает возможность в условиях (3) заменить $\sum_{k \in J_m} x_{jk}^m$ на a_j^m . Если теперь для каждого такого фиксированного m выбрать все те $n > m$, для которых $\alpha_{nm} > 0$, и в соответствующих условиях (3) положить $\tilde{b}_j^n = b_j^n + \alpha_{nm} a_j^m$ и $\tilde{a}_{nm} = 0$, то ненулевые α_{nm} останутся только для тех m , для которых $\sum_{i \in I_m} a_i^m > B_m$, что соответствует нашему предположению.

Заметим еще, что обычная транспортная задача Хитчкока является частным случаем комплексной при $N=1$, а обычная транспортная задача с промежуточными узлами — таким частным случаем, когда для каждого m существует не более одного $n > m$, для которого $\alpha_{nm} > 0$ (в этом случае можно считать все $\alpha_{nm} = 1$).

1. ОЦЕНКА ДВОЙСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ

Зададимся целью построить возможно более «тесный» прямоугольник

$$\Pi = \left\{ \begin{aligned} \bar{f}_i^n &\geq u_i^n \geq \underline{f}_i^n, & i \in I_n, \\ \bar{d}_j^n &\geq v_j^n \geq \underline{d}_j^n, & j \in J_n \end{aligned} \right\} \quad n = 1, \dots, N,$$

который бы при любых допустимых значениях параметров $c_{ij}^n, a_i^n, b_j^n, \alpha_{nm}$ ($i \in I_n, j \in J_n, 1 \leq n, m \leq N$) задачи (1) — (5) содержал хотя бы одно оптимальное решение $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ этой задачи.

Пусть $\bar{x}$ — некоторое оптимальное решение задачи (1) — (5). Оптимальное решение двойственной задачи $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ должно удовлетворять условиям

$$\bar{v}_j^n - \bar{u}_i^n - \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{v}_i^m \leq c_{ij}^n, \quad \text{если } x_{ij}^n = 0 \quad \left. \begin{aligned} & i \in I_n, j \in J_n, \\ & n = 1, \dots, N, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\bar{v}_j^n - \bar{u}_i^n - \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{v}_i^m = c_{ij}^n, \quad \text{если } x_{ij}^n > 0 \quad \left. \begin{aligned} & n = 1, \dots, N, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_i^n &\geq 0, & \text{если} & \sum_{j \in J_n} \bar{x}_{ij}^n = a_i^n \\ \bar{u}_i^n &= 0, & \text{если} & \sum_{j \in J_n} \bar{x}_{ij}^n < a_i^n \end{aligned} \right\} \quad i \in I_n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (8)$$

$$(9)$$

Прежде всего покажем, что для всех n можно считать

$$\min_{i \in I_n} \bar{u}_i^n = 0.$$

Если для данного n $\sum_{i \in I_n} a_i^n > B_n$, то обязательно найдется $i \in I_n$, для которого $a_i^n > \sum_{j \in J_n} \bar{x}_{ij}^n$, поскольку в (3) стоят равенства.

Для такого i , согласно (9), должно быть $\bar{u}_i^n = 0$. Значит для данного n $\min_{i \in I_n} \bar{u}_i^n = 0$ в любом оптимальном $\{\bar{u}, \bar{v}\}$. Если же для некоторых n

$\sum_{i \in I_n} a_i^n = B_n$, то для этих n все условия (2) имеют вид равенств и ограничения $\bar{u}_i^n \geq 0$ необязательны. Покажем, что и в этом случае найдется хотя бы одно двойственное решение, для которого $\min_{i \in I_n} \bar{u}_i^n = 0$ для

указанных n . Выберем из таких n максимальный номер n_0 . Если $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ — некоторый оптимальный двойственный план, то таковым же будет вектор $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ с компонентами

$$\begin{aligned} \bar{v}_j^{n_0} &= \tilde{v}_j^{n_0} + c_{n_0}, & j \in J_{n_0}, \\ \bar{u}_i^{n_0} &= \tilde{u}_i^{n_0} + c_{n_0}, & i \in I_{n_0}, \\ \bar{v}_j^m &= \tilde{v}_j^m + c_m, & j \in J_m, \quad m < n_0, \\ \bar{v}_i^m &= \tilde{u}_i^m, & i \in I_m, \quad m \neq n_0, \\ \bar{v}_j^m &= \tilde{v}_j^m, & j \in J_m, \quad m > n_0, \end{aligned}$$

где c_{n_0} — произвольное число, а c_m ($m < n$) определяются для каждого c_{n_0} по рекуррентной формуле

$$c_m = \sum_{n_0 \geq n > m} a_{nm} c_n.$$

В этом легко убедиться, проверив соблюдение условий (6), (7) для всех n и (8), (9) для всех $n \neq n_0$.

Выберем число c_{n_0} таким: $c_{n_0} = -\min_{i \in I_{n_0}} \tilde{u}_i^{n_0}$. Тогда $\min_{i \in I_{n_0}} \bar{u}_i^{n_0} = \min_{i \in I_{n_0}} (\tilde{u}_i^{n_0} + c_{n_0}) = 0$.

Теперь из всех оставшихся $n < n_0$, для которых $\sum_{i \in I_n} a_i^n = B_n$, опять выберем максимальный номер и повторим наше преобразование двойственного решения и так далее, пока для всех таких n не станет $\min_{i \in I_n} \bar{u}_i^n = 0$. Это и есть конструктивное доказательство нашего утверждения.

Продолжим построение априорных оценок. Теперь мы знаем, что существует хотя бы один оптимальный двойственный план $\{\bar{u}, \bar{v}\}$, для которого $\min_{i \in I_n} \bar{u}_i^n = 0$ для всех n , и будем стараться построить возможно бо-

лее «тесный» прямоугольник, содержащий хотя бы один из таких планов. Из (6) и (7) следует, что для каждого $j \in J_n$ и всех $i \in I_n$

$$\bar{v}_j^n - \bar{u}_i^n - \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{v}_i^m \leq c_{ij}^n.$$

Значит

$$\begin{aligned} \bar{v}_j^n &\leq \min_{i \in I_n} (c_{ij}^n + \bar{u}_i^n + \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{v}_i^m) \leq \min_{i \in I_n} \bar{u}_i^n + \\ &+ \max_{i \in I_n} (c_{ij}^n + \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{v}_i^m) = \max_{i \in I_n} (c_{ij}^n + \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{v}_i^m). \end{aligned} \quad (10)$$

Для $n = N$ и всех $j \in J_N$ имеем из (10)

$$\bar{v}_j^N \leq \max_{i \in I_N} c_{ij}^N = \bar{d}_j^N.$$

Остальные $\bar{d}_j^n$ определяются рекуррентно с помощью той же оценки (10)

$$\bar{d}_i^n = \max_{i \in I_n} (c_{ij}^n + \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{d}_i^m), \quad j \in J_n, \quad n = N-1, N-2, \dots, 1.$$

Для каждого $j \in J_n$ существуют две возможности:

а) найдется $i \in I_n$, что $\bar{x}_{ij}^n > 0$. Тогда, согласно (7)

$$\bar{v}_j^n = c_{ij}^n + \bar{u}_i^n + \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{v}_i^m \geq \min_{i \in I_n} (c_{ij}^n + \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{v}_i^m), \quad (11)$$

б) для всех $i \in I_n$, $\bar{x}_{ij}^n = 0$. Тогда, согласно (6), для всех $i \in I_n$ $\bar{v}_j^n \leq c_{ij}^n + \bar{u}_i^n + \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{v}_i^m$, значит $\bar{v}_j^n \leq \min_{i \in I_n} (c_{ij}^n + \bar{u}_i^n + \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{v}_i^m)$.

Случай б) может быть тогда и только тогда, когда $b_j^n = 0$ и $\sum_{nq} \bar{x}_{jk}^q = 0$ для всех $q < n$. Последнее означает, что для тех $q < n$, для которых $\alpha_{nq} > 0$, должно быть $\bar{x}_{jk}^q = 0$ при всех $k \in J_q$. Но в таком случае для каждого $k \in J_q$ имеет место условие (6)

$$\bar{v}_k^q - \bar{u}_j^q - \alpha_{nq} \bar{v}_i^n - \sum_{p \neq q, p \geq q} \alpha_{pq} \bar{v}_j^p \leq c_{jk}^q. \quad (12)$$

Если неравенству (12) удовлетворяет число $\bar{v}_j^n \leq \min_{i \in I_n} (c_{ij}^n + \bar{u}_i^n + \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{v}_i^m)$, то ему тем более будет удовлетворять число $\bar{v}_i^n = \min_{i \in I_n} (c_{ij}^n + \bar{u}_i^n + \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{v}_i^m)$; поскольку $\alpha_{nq} \geq 0$. Поэтому для всех $j \in J_n$, для которых имеет место случай б), можно компоненту $\bar{v}_j^n$ заменить на $\bar{v}_j^n$ (на самом деле дальше будем обозначать ее по-старому) и от этого двойственный план не перестанет быть оптимальным. Иначе говоря, из подмножества оптимальных двойственных планов, для которых $\min_{i \in I_n} \bar{u}_i^n = 0$, можно выделить еще более узкое (но не пустое!) подмножество планов, для которых $\bar{v}_j^n = \bar{v}_j^n$ в случае б).

Итак, в случае б) тоже имеем оценку (11). Для $n = N$ она принимает вид $\bar{v}_j^N \geq \min_{i \in I_N} c_{ij}^N = \bar{d}_j^N$, а для остальных n $\bar{d}_j^n$ определяются рекуррентно

$$\bar{d}_j^n = \min_{i \in I_n} (c_{ij}^n + \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{d}_j^m), \quad j \in J_n, \quad n = N-1, N-2, \dots, 1.$$

Пусть для данного n $\sum_{i \in I_n} a_i^n > B_n$. Для каждого $i \in I_n$ могут быть две возможности:

в) для всех $j \in J_n$ $\bar{x}_{ij}^n = 0$, тогда $\sum_{j \in J_n} \bar{x}_{ij}^n < a_i^n$, откуда следует $\bar{u}_i^n = 0$;

г) найдется $j \in J_n$, для которого $\bar{x}_{ij}^n > 0$, тогда из (7)

$$\bar{u}_i^n = \bar{v}_j^n - \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{v}_i^m - c_{ij}^n \leq \max_{j \in J_n} (\bar{d}_j^n - c_{ij}^n) - \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{d}_i^m = \bar{f}_i^n.$$

Если $\sum_{i \in I_n} a_i^n = B_n$, то имеется только возможность г). Поскольку заранее не известно, какая из этих возможностей реализуется для данного $i \in I_n$, то следует принять $0 \leq \bar{u}_i^n \leq \bar{f}_i^n$.

Итак, прямоугольник Π построен. Его границы

$$f_i^n = 0, \quad \bar{f}_i^n = \max_{j \in J_n} (\bar{d}_j^n - c_{ij}^n) - \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{d}_i^m, \quad i \in I_n,$$

$$d_j^n = \min_{i \in I_n} (c_{ij}^n + \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{d}_i^m) \bar{d}_j^n = \max_{i \in I_n} (c_{ij}^n + \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} \bar{d}_i^m), \quad j \in J_n.$$

На классе *всех* допустимых параметров задачи эти границы достигаются, поскольку для матриц $\{c_{ij}^n\}$ с одинаковыми элементами $c_{ij}^n = c$ имеем $f_i^n = \bar{f}_i^n = 0$ и $d_j^n = \bar{d}_j^n$. (Это конечно не значит, что их нельзя существенно сузить на некотором подклассе параметров.)

Для обычной транспортной задачи имеем в частности ($N=1$):

$$f_i = 0, \quad \bar{f}_i = \max_j (\bar{d}_j - c_{ij}), \quad d_j = \min_i c_{ij}, \quad \bar{d}_j = \max_i c_{ij}.$$

2. ИТЕРАТИВНЫЙ МЕТОД ТИПА БРАУНА

Используем априорные оценки для построения одного итеративного процесса решения комплексной транспортной задачи. Специального конечного метода решения этой задачи пока не существует. Общие методы линейного программирования здесь явно нерациональны. Между тем во многих случаях достаточно найти приближенное решение с заданной (не очень большой) степенью точности.

Стандартный способ сведения задачи (1)–(5) к матричной игре [1–3] дает слишком большую размерность платежной матрицы и стратегий игроков.

Воспользуемся другим общим приемом, который, в применении к нашей конкретной задаче, представляется более экономным.

Допустим, требуется найти приближенное (с данной точностью) решение задачи

$$(c, x) \rightarrow \min, \quad x \in G = \{x | Ax \geq b\}. \quad (13)$$

Пусть множество G непусто и ограничено. Разобьем условия $Ax \geq b$ на две группы и обозначим

$$G_1 = \{x | A_1 x \geq b_1\}, \quad G_2 = \{x | A_2 x \geq b_2\}.$$

Из теоремы двойственности для случая линейной задачи [4, теоремы 5 и 7] следует

$$W = (c, \bar{x}) = \min_{x \in G} (c, x) = \min \sup_{x \in G, v \geq 0} L(v, x) = \max \inf_{v \geq 0, x \in G_1} L(v, x) = L(\bar{v}, \bar{x}), \quad (14)$$

где $L(v, x) = (c, x) - (v, A_2x - b_2)$.

При этом можно показать, что если $\{\bar{v}, \bar{x}\}$ — некоторая седловая точка, то $\bar{v}$ является вектором оптимальных оценок условий $A_2x \geq b_2$ задачи (13) для решения $\bar{x}$, и наоборот, если $\bar{v}$ — вектор оптимальных оценок этих условий для решения $\bar{x}$ задачи (13), то $\{\bar{v}, \bar{x}\}$ — седловая точка функции $L(v, x)$ на множестве $\{v \geq 0\} \times G_1$.

Пусть удалось найти такие выпуклые многогранники $P \in \{v \geq 0\}$ и $Q \in G_1$, что множество $P \times Q$ заведомо содержит хотя бы одну пару оптимальных решений $\{\bar{v}, \bar{x}\}$. Тогда

$$W = L(\bar{v}, \bar{x}) = \min_{x \in Q} \max_{v \in P} L(v, x) = \max_{v \in P} \min_{x \in Q} L(v, x). \quad (15)$$

Рассмотрим в пространстве $\{y\}$ два множества $A = \{y | f_i(y) \geq 0, i = 1, \dots, I\}$ и $B = \{y | g_k(y) \geq 0, k = 1, \dots, K\}$, таких, что $A \subseteq B$. Ограничение $f_i(y) \geq 0$ будем называть «собственным» для A , если $f_i(y) \neq g_k(y), y \in A$ для каждого $k = 1, \dots, K$ (f_i и g_k — непрерывные функции).

Теорема. Если $\{\bar{v}, \bar{x}\}$ — седловая точка выпукло-вогнутой функции $L(v, x)$ на $H \times G$, где $H = \{v | g_k(v) \geq 0, k = 1, \dots, K\}$, $G = \{x | \psi_s(x) \geq 0, s = 1, \dots, S\}$ — выпуклые множества $H \supseteq P = \{v | f_i(v) \geq 0, i = 1, \dots, I\}$, $G \supseteq Q = \{x | \varphi_r(x) \geq 0, r = 1, \dots, R\}$; $\{\bar{v}, \bar{x}\} \in P \times Q$; $f_i(\bar{v}) > 0$ и $\varphi_r(\bar{x}) > 0$ для всех собственных ограничений множеств P и Q ; то всякая точка $\{\tilde{v}, \tilde{x}\}$, седловая для $L(v, x)$ на $P \times Q$, является седловой и на $H \times G$.

Доказательство. Из условия сразу вытекает, что $\{\bar{v}, \bar{x}\}$ и $\{\tilde{v}, \tilde{x}\}$ седловые на $P \times Q$. Пусть $\{\tilde{v}, \tilde{x}\}$ не седловая на $H \times G$. Тогда найдется $v^* \in H$, для которой $L(v^*, \tilde{x}) > L(\tilde{v}, \tilde{x}) = L(\bar{v}, \bar{x})$. Рассмотрим отрезок $v(\lambda) = \lambda v^* + (1 - \lambda) \bar{v} \in H$ ($0 \leq \lambda \leq 1$). В силу выпуклости $L(v, x)$ по v вверх $L(v(\lambda), \tilde{x}) \geq \lambda L(v^*, \tilde{x}) + (1 - \lambda) L(\bar{v}, \tilde{x}) > L(\bar{v}, \tilde{x})$ для всех $1 \geq \lambda > 0$. Поскольку $f_i(\bar{v}) > 0$ для всех собственных ограничений P , то найдется $\lambda_0 > 0$, для которого $f_i(v(\lambda_0)) \geq 0$, т. е. $v(\lambda_0) \in P$. Значит неравенство $L(v(\lambda_0), \tilde{x}) > L(\bar{v}, \tilde{x}) = L(\tilde{v}, \tilde{x})$ противоречит условию, что $\{\tilde{v}, \tilde{x}\}$ — седловая на $P \times Q$. Поэтому $\{\tilde{v}, \tilde{x}\}$ должна быть седловой на $H \times G$. Продолжив теперь те же рассуждения для $\tilde{x}$, получим, что $\{\tilde{v}, \tilde{x}\}$ должна быть также седловой на $H \times G$.

Замечание. Условие $f_i(\bar{v}) > 0, \varphi_r(\bar{x}) > 0$ для всех собственных ограничений множеств P и Q является в теореме существенным. В качестве примера рассмотрим $L(v, x) = v \cdot x$, $H = \{v | -a \leq v \leq a\}$, $P = \{v | -a \leq v \leq 0\}$, $Q = G = \{x | -b \leq x \leq b\}$, $\{\bar{v}, \bar{x}\} = \{0, 0\}$, $a > 0, b > 0$. Здесь точка $\bar{v} = 0$ находится на собственной границе множества P . Все остальные условия теоремы выполнены. Однако точка $\{0, b\}$, являясь седловой на $P \times Q$ (так как $v \cdot b \leq 0 \cdot b \leq 0 \cdot x$ для $v \in P, x \in Q$), не сохраняет это свойство на $H \times G$, поскольку, например, $a \cdot b > 0 \cdot b$.

Пусть выделенные нами ранее многогранники $P \subseteq \{v \geq 0\}$ и $Q \subseteq G_1$ удовлетворяют этому условию теоремы. Тогда всякое решение задачи (15) будет также решением (14).

Если P и Q обладают следующими свойствами: для любого $x^* \in Q$ легко находится $\max_{v \in P} L(v, x^*)$, для любого $v^* \in P$ легко находится $\min_{x \in Q} L(v^*, x)$, P и Q достаточно «тесны», то для решения минимаксной задачи (15) удобно воспользоваться следующим алгоритмом типа Брауна:

1. Процесс начинается с пары $\{x^0, v^0\} \in Q \times P$.
2. Пусть на p -м шаге получены векторы x^p, v^p .

Определяем $\tilde{v}^{p+1}$, на котором достигается $\max_{v \in P} L(v, x^p)$, и полагаем $v^{p+1} = \gamma_{p+1} v^p + (1 - \gamma_{p+1}) \tilde{v}^{p+1}$.

3. Определяем $\tilde{x}^{p+1}$, на котором достигается $\min_{x \in Q} L(v^{p+1}, x)$, и полагаем $x^{p+1} = \beta_{p+1} x^p + (1 - \beta_{p+1}) \tilde{x}^{p+1}$.

4. Определяем оценки величины $w = (c, \bar{x})$: нижнюю $L(v^{p+1}, \tilde{x}^{p+1})$, верхнюю $L(\tilde{v}^{p+1}, x^p)$.

Если $\frac{L(\tilde{v}^{p+1}, x^p) - L(v^{p+1}, \tilde{x}^{p+1})}{L(\tilde{v}^{p+1}, x^p) + L(v^{p+1}, \tilde{x}^{p+1})} < \varepsilon$, то заканчиваем вычисления.

В противном случае возвращаемся к п. 2.

Коэффициенты γ_p и β_p назначаются согласно какой-нибудь модификации процесса Брауна.

Если представить v и x в виде выпуклых комбинаций вершин многогранников P и Q , то легко убедиться, что описанный алгоритм есть не что иное, как процесс типа Брауна для матричной игры с платежной матрицей, состоящей из элементов $l_{ks} = L(v^{(k)}, x^{(s)})$, где $\{v^{(k)}, x^{(s)}\}$ — пара вершин многогранников P и Q . Вычисление оптимальных ответов $\tilde{v}^{p+1}$ и $\tilde{x}^{p+1}$ (а ими обязательно будут некоторые вершины P и Q в силу билинейности функции $L(v, x)$) соответствует поочередному выбору игроками наилучших чистых стратегий на $p+1$ шаге, а определение x^{p+1} и v^{p+1} — выбору смешанных стратегий.

При этом на каждой итерации решаются простые линейные задачи на оптимум размеров $m_2 \times n$ и $n \times m_2$. Если множества G_1 , P и Q выбраны удачно, то решения этих задач вписываются сразу в явном (или почти в явном) виде. P и Q должны быть как можно «теснее», поскольку это должно по некоторым соображениям способствовать ускорению сходимости.

Для комплексной транспортной задачи положим

$$P = \{v_j^n \mid d_{j\varepsilon}^n \leq v_j^n \leq \bar{d}_{j\varepsilon}^n, \quad j \in J_n, \quad n = 1, \dots, N\},$$

где $d_{j\varepsilon}^n = (1 - \varepsilon) \bar{d}_j^n$, $\bar{d}_{j\varepsilon}^n = (1 + \varepsilon) \bar{d}_j^n$, $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$Q = G_1 - \left\{x_{ij}^n \mid \sum_{j \in J_n} x_{ij}^n \leq a_i^n, \quad x_{ij}^n \geq 0, \quad i \in I_n, \quad j \in J_n, \quad n = 1, \dots, N\right\}.$$

Это допустимо. В самом деле, множество P , согласно п. 1, содержит часть $\bar{v}$ хотя бы одного оптимального двойственного решения $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ задачи (1) — (5). Пусть $\bar{x}$ — решение прямой задачи. Тогда $\bar{x} \in Q$, так как $Q = G_1 \supset G \ni \bar{x}$. Значит $P \times Q \ni \{\bar{v}, \bar{x}\}$, причем $\bar{v}$ не лежит на собственных ограничениях P . Оптимальные ответы на множествах P и Q отыскиваются весьма просто. Функция Лагранжа $L(v, x)$ имеет здесь вид

$$\begin{aligned} L(v, x) &= \sum_{n, i, j} c_{ij}^n x_{ij}^n - \sum_{n, j} v_j^n \left(\sum_{i \in I_n} x_{ij}^n - b_j^n - \sum_{m \leq n} a_{nm} \sum_{k \in J_m} x_{jk}^m \right) = \\ &= \sum_{n, i, j} x_{ij}^n (c_{ij}^n - v_j^n + \sum_{m \geq n} a_{nm} v_i^m) + \sum_{n, j} v_j^n b_j^n. \end{aligned}$$

Поэтому $\max_{v \in P} L(v, x^p)$ достигается на векторе $\tilde{v}^{p+1}$ с компонентами

$$(\tilde{v}_j^n)^{p+1} = \begin{cases} d_{j\varepsilon}^n, & \text{если } \sum_{i \in I_n} (x_{ij}^n)^p - b_j^n - \sum_{m \leq n} a_{nm} \sum_{k \in J_m} (x_{jk}^m)^p \geq 0, \\ \bar{d}_{j\varepsilon}^n, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а

$$\min_{x \in Q} L(v^{p+1}, x) = \sum_n \sum_{i \in I_n} \min_{Q_i^n} \sum_{j \in J_n} x_{ij}^n (c_{ij}^n - (v_j^n)^{p+1} + \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} (v_i^m)^{p+1}),$$

где

$$Q_i^n = \{x_{ij}^n \mid \sum_{j \in J_n} x_{ij}^n \leq a_i^n, \quad x_{ij}^n \geq 0, \quad j \in J_n\}$$

достигается на векторе $\tilde{x}^{p+1}$ с компонентами

$$(x_{ij}^n)^{p+1} = \begin{cases} a_i^n, & \text{если } j \text{ — первый из } \{j \in J_n \mid a_i^n (\Delta c_{ij}^n)^{p+1} = \min_{j \in J_n} (0 \min_{j \in J_n} a_i^n (\Delta c_{ij}^n)^{p+1})\}^*, \\ 0 & \text{— для остальных } j \in J_n \end{cases}$$

для каждого $i \in I_n, n = 1, \dots, N$, где $(\Delta c_{ij}^n)^{p+1} = c_{ij}^n - (v_j^n)^{p+1} + \sum_{m \geq n} \alpha_{mn} (v_i^m)^{p+1}$.

Остальные этапы алгоритма изложены выше. При достаточно большом числе итераций вектор x^n , полученный на последней из них, будет сколь угодно близок к множеству оптимальных планов, поскольку пара $\{v^n, x^n\}$ должна быть близка к множеству предельных точек последовательности $\{v^p, x^p\}, p = 1, 2, \dots$, каждая из которых является седловой точкой.

Однако вектор x^n может, вообще говоря, не быть даже допустимым транспортным планом, хотя эта «недопустимость» должна быть при $n \rightarrow \infty$ сколь угодно мала. Это не является большим недостатком метода, поскольку всегда можно за небольшое число шагов перейти к допустимому плану x^* , близкому к x^n , т. е. x^* также будет сколь угодно близок к множеству оптимальных планов при достаточном числе итераций.

Такой переход состоит в последовательном сокращении невязок $(\Delta b_j^n)^n = \sum_{i \in I_n} (x_{ij}^n)^n - b_j^n - \sum_{m \leq n} \alpha_{nm} \sum_{k \in J_m} (x_{jk}^m)^n$ для всех n , начиная с $n=1$ и при соблюдении условий $\sum_{j \in J_n} x_{ij}^n \leq a_i^n$ и $x_{ij}^n \geq 0$ за счет изменения величин x_{ij}^n для данного j . При этом сокращение невязки $(\Delta b_j^n)^n$ не изменяет величины невязки $(\Delta b_k^n)^n$ ($k \neq j$), так как все x_{ik}^n остаются неизменными.

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО ГРАДИЕНТНОГО СПУСКА

Априорные оценки двойственного решения дают возможность обойти одно затруднение в другом итеративном алгоритме, который нами также используется для решения задачи (1) — (5).

В [5] предложен обобщенный градиентный спуск для решения минимаксной задачи (14), представленной в виде $R(v) = \inf_{x \in G_1} L(v, x) \rightarrow \max_{v \geq 0}$.

На каждой итерации спуска для построенного ранее вектора v^p определялся обобщенный градиент $\Phi(v^p)$.

* Предполагается, что $\sum_{i \in I_n} a_i^n > B_n$. Если же для данного n $\sum_{i \in I_n} a_i^n = B_n$, то вместо

$\min_{j \in J_n} (0, \dots)$ следует читать просто $\min_{j \in J_n} a_i^n (\Delta c_{ij}^n)^{p+1}$.

Для этого решалась задача $L(v^p, x) = (c, x) - (v^p, A_2x - b_2) \xrightarrow{x \in G_1} \min$.

Предполагалось, что она имеет решение при любом $v^p \geq 0$. Для этого достаточно, чтобы $G_1 = \{x | A_1x \geq b_1\}$ было ограничено. Если x^p — решение этой задачи, то $\varphi(v^p) = A_2x^p - b_2$.

Затем делался шаг $v_j^{p+1} = \max \left(0, v_j^p + \lambda_p \frac{\varphi_j(v^p)}{\|\varphi(v^p)\|} \right)$, где $\lambda_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ и

$$\sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p = \infty \text{ т. д.}$$

Этот метод дает оптимальный вектор $\bar{v}$ и значение $R(\bar{v}) = W$ (все — с заданной точностью), но оптимальный прямой план $\bar{x}$ остается неизвестным.

Укажем простой путь, который приводит к устранению этого недостатка по крайней мере для задачи (1) — (5). Обратимся к (14). Возьмем в качестве G_1 множество $\{x | x \geq 0\}$, если условия $Ax \geq b$ имеют вид $\{Hx \geq h, x \geq 0\}$, или все пространство $\{x\}$, если они не имеют такого вида. Остановимся на первом случае (для второго все действия аналогичны).

Равенства (14) принимают вид

$$W = (c, \bar{x}) = \min_{\substack{Hx \geq h \\ x \geq 0}} (c, x) = \min_{x \geq 0} \sup_{y \geq 0} [(c, x) - (y, Hx - h)] = \dots = (\bar{y}, h).$$

Пусть нам удалось построить в пространстве $\{y\}$ выпуклый многогранник $S \subset \{y \geq 0\}$, содержащий хотя бы одно оптимальное двойственное решение $\bar{y}$, возможно более «тесный», но в то же время достаточно «простой». Тогда

$$\min_{x \geq 0} \sup_{y \geq 0} [(c, x) - (y, Hx - h)] = \min_{x \geq 0} \max_{y \in S} [(c, x) - (y, Hx - h)].$$

Теперь спуск можно проводить по x . Для каждого x^p находим обобщенный градиент $\psi(x^p) = c - y^p H$, где y^p — решение задачи

$$-(y, Hx^p - h) \xrightarrow{y \in S} \max.$$

Если S выбран достаточно «простым», то y^p находится без труда. «Теснота» должна способствовать ускорению сходимости спуска. Затем делаем шаг по x

$$x_j^{p+1} = \max \left(0, x_j^p - \lambda_p \frac{\psi_j(x^p)}{\|\psi(x^p)\|} \right) \text{ и т. д.}$$

В результате спуска получим приближенно-оптимальный $\bar{x}$. Для комплексной транспортной задачи возьмем $S = \Pi$. Тогда $\psi_j^n(x^p) =$

$$= c_{ij}^n - (v_j^n)^p + (u_i^n)^p + \sum_{m \geq n} a_{mn} (v_i^n)^p,$$

где $\{u, v\}^p$ есть решение задачи

$$\begin{aligned} & \sum_{nj} v_j^n \left[b_j^n - \sum_{i \in I_n} (x_{ij}^n)^p + \sum_{m \leq n} a_{nm} \sum_{k \in J_m} (x_{jk}^m)^p \right] - \\ & - \sum_{ni} u_i^n \left[a_i^n - \sum_{j \in J_n} (x_{ij}^n)^p \right] \xrightarrow{\{u, v\} \in \Pi} \max. \end{aligned}$$

Ответ этой задачи

$$(v_j^n)^p = \begin{cases} \bar{d}_j^n, & \text{если } b_j^n - \sum_{i \in I_n} (x_{ij}^n)^p + \sum_{m \leq n} a_{nm} \sum_{k \in J_m} (x_{jk}^m)^p \geq 0, \\ \underline{d}_j^n & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$(u_i^n)^p = \begin{cases} \bar{f}_i^m, & \text{если } a_i^n - \sum_{j \in J_n} (x_{ij}^n)^p \leq 0, \\ \underline{f}_i^n & \text{в противном случае} \end{cases}$$

4. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ И ВЕНГЕРСКИЙ МЕТОД

Прямоугольник П для обычной транспортной задачи можно использовать для оценки числа непрорывов в методе Форда — Фалкерсона решения этой задачи [6].

При разработке конечного метода решения задачи (1) — (5) оценки ее оптимального двойственного плана могут найти аналогичное применение.

Согласно алгоритму Форда — Фалкерсона при каждом непрорыве должны быть помечены все те поставщики, для которых $\sum_j x_{ij} < a_i$ (предполагается, что $\sum_i a_i = \sum_j b_j$). Для таких i на данной итерации u_i остается неизменным. Поскольку алгоритм начинается с $u_i = 0$ для всех i и с $v_j = \underline{d}_j$ для всех j , то это значит, что в конечном двойственном плане $\min_j \bar{u}_i = 0$. Но такое двойственное решение должно содержаться в нашем прямоугольнике П, т. е. $0 \leq \bar{u}_i \leq \bar{f}_i$, $\underline{d}_j \leq \bar{v}_j \leq \bar{d}_j$. При каждом непрорыве мы прибавляем к u_i или v_j для непомеченных i и j величину $\Delta \geq \delta \geq 1$, где δ — наибольший общий делитель (целых) чисел $c_{ij} \geq 0$. Значит, каждый j не может быть непомеченным более, чем $(1/\delta)(\bar{d}_j - \underline{d}_j)$ раз. Поскольку при непрорыве хотя бы один i непомечен, то общее число непрорывов не может быть больше, чем

$$\sum_j \frac{1}{\delta} (\bar{d}_j - \underline{d}_j) = \frac{1}{\delta} \sum_i (\max_{ij} c_{ij} - \min_{ij} c_{ij}).$$

Эта оценка может дать совсем другой результат, чем оценка Манкре-са [7]. $(\sum_i b_j - 1)(\min(m, n) + 1)$. Чтобы сравнить эти оценки, пред-

ставим, что b_j и c_{ij} — величины одного порядка. Тогда первая оценка лучше второй по крайней мере в $\min(m, n)$ раз. Конечно, возможны задачи и с любыми другими соотношениями.

5. НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Метод, изложенный в п. 2, испробован на простой и комплексной транспортных задачах. Вычисления проводились на машине М-220.

Для простых транспортных задач был поставлен небольшой статистический эксперимент: для двух размерностей $m \times n$ (m — число поставщиков, n — число заказчиков) и трех отношений

$$\frac{\Delta c}{c} = 2 \frac{\max_{ij} c_{ij} - \min_{ij} c_{ij}}{\max_{ij} c_{ij} + \min_{ij} c_{ij}}$$

было решено по 10 задач на каждое сочетание $(m \times n, \frac{\Delta c}{c})$ со случайными ценами и мощностями и подсчитано среднее время счета одной

задачи для каждого из таких сочетаний

$\frac{\Delta c}{c} \%$:	20	60	100
$m \times n \begin{cases} 5 \times 25 \\ 20 \times 25 \end{cases}$	4 сек 13 сек.	15 сек. 44 сек.	36 сек. 104 сек.

Принималось $\varepsilon = 0,05$. При этом погрешность приближенного решения по целевой функции во всех задачах была около 1%. Решена также одна комплексная транспортная задача с шестью продуктами, по 10 поставщиков и 20 заказчиков для каждого продукта. Отношение $\frac{\Delta c}{c} \%$ для каждого продукта было 100%, $\varepsilon = 0,03$. Решение заняло 67 мин. Та же программа допускает 30 продуктов с 20 поставщиками и 20 заказчиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Г. Гольштейн, С. М. Мовшович. О некоторых современных направлениях в математическом программировании. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 5.
2. Дж. Б. Данциг. Линейное программирование, его применения и обобщения. М., «Прогресс», 1966.
3. Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. Новые направления в линейном программировании. М., «Сов. радио», 1966.
4. Е. Г. Гольштейн. Двойственные задачи выпуклого программирования. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 3.
5. Н. З. Шор. Применение обобщенного градиентного спуска в блочном программировании. Кибернетика, 1967, № 3.
6. Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон. Потоки в сетях. М., «Мир», 1966.
7. J. Munkres. Algorithms for the Assignment and Transportation Problems. J. Soc. Industr. Appl. Math., 1957, № 5 (см. также [5], гл. III).

Поступила в редакцию
21.X.1968