

Литература

1. Радищев А. Н. Путешествие из Петербурга в Москву.— В кн.: А. Н. Радищев. Избранные философские и общественно-политические произведения. Госполитиздат, 1952.
2. Пушкин А. С. Полн. собр. соч.: В 10-ти т. 4-е изд. Л.: Наука, Ленингр. отд., 1978.
3. Сухомлинов М. И. История Росийской Академии. Вып. 4. СПб., 1878.
4. Марковников В. В. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1955.
5. Ломоносов М. В. Полн. собр. соч. в 10-ти т. М.-Л.: Изд-во АН СССР. Т. 10. Служебные документы. Письма. 1957.
6. Свиньин П. П. Известие о вновь открытых рукописях Ломоносова.— Отечеств. зап., 1827, т. 31.
7. Московский телеграф, 1827, ноябрь. Ч. XVIII, № 22. Ломоносов М. В. Репорт Президенту АН с отчетом о работах за 1751—1756 гг.— Полн. собр. соч., т. 10.
8. Московский телеграф, 1825, сентябрь. Ч. V, № 18.
9. Ломоносов М. В. Сборник статей и материалов. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1940.
10. Белинский В. Г. Полн. собр. соч. в 13-ти т. М.: Изд-во АН СССР, 1953—1959.

18 февраля этого года известному советскому историку математики Федору Андреевичу Медведеву исполнилось 60 лет. Ф. А. Медведев родился в деревне Богдановка Козельского района Калужской области, в 1952 г. окончил Калужский педагогический институт и три года учительствовал в сельских школах. В 1955 г. он поступил в аспирантуру Института истории естествознания и техники АН СССР. С Институтом связана вся его последующая деятельность. Федор Андреевич — автор книг «Развитие теории множеств в XIX веке» (1965), «Развитие понятия интеграла» (1974), «Очерки истории теории функций действительного переменного» (1975), «Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX—XX вв.» (1976), «Ранняя история аксиомы выбора» (1982), а также более 70 статей, широко известных специалистам математики, историкам науки и философам у нас в стране и за рубежом.

Институт и редколлегия журнала сердечно поздравляют Федора Андреевича с днем рождения и желают ему крепкого здоровья, благополучия и дальнейших творческих успехов.

МЕТАМОРФОЗЫ АКСИОМЫ ВЫБОРА

Ф. А. МЕДВЕДЕВ

«Метаморфоза — превращение или принятие иного образа»
В. Даль

Математическое утверждение, обозначенное в заглавии словами «аксиома выбора», именуется по-разному: «аксиомой произвольного выбора», «аксиомой Цермело», «мультипликативной аксиомой»; порой в тех же сочетаниях слов термин «аксиома» заменяется терминами «постулат» или «принцип», а иногда говорят о «гипотезе».

Чаще всего это утверждение высказывают в трех следующих формах. Пусть задано семейство S непустых множеств X . Тогда: 1) существует множество M , элементами которого являются выбранные по одному элементу всех множеств X ; другими словами, существует множество M , имеющее с каждым X , принадлежащим S , один, и только один, общий элемент и не содержащее иных элементов; 2) существует однозначная функция множества $f(X)$, заданная на S и принимающая на каждом X значение, принадлежащее этому X ; 3) декартово произведение множеств X не пусто¹.

¹ Под декартовым (или картезианским) произведением множеств X семейства S понимается множество, элементами которого являются комплексы элементов, взятых по одному из каждого X . Более точное определение см. в книгах Ф. Хаусдорфа [1, с. 20—22] или К. Куратовского и А. Мостовского [2, с. 140—141].

Подобно аксиоме параллельности в геометрии, имеющей многочисленные эквиваленты, свои эквиваленты есть и у аксиомы выбора, причем число и разнообразие последних гораздо больше. Под описываемыми далее метаморфозами аксиомы выбора будут пониматься именно ее эквиваленты, т. е. утверждения, порой внешне совсем не сходные с нею, но вытекающие из нее и имеющие названную аксиому своим следствием. Ввиду многочисленности таковых придется ограничиться лишь их незначительной частью, причем вопрос о частных случаях утверждений 1—3 и их эквивалентах вообще рассматриваться не будет. Не будет речи и о формулировках, аналогичных 1—3, но относящихся к классам, а не к множествам и соответствующих им метаморфозам. Останется в стороне и принцип селекции²

Исторически первым, известным теперь эквивалентом аксиомы выбора является так называемый принцип трихотомии для мощностей. Г. Кантор, введя в 1878 г. общее понятие мощности m множества M как некоторой количественной характеристики эквивалентных M множеств, принял в виде само собой разумеющегося допущения, что если даны два произвольных множества M и N , имеющие соответственно мощности m и n , то обязательно выполняется одно, и только одно, из трех следующих отношений:

$$m=n, m>n, n>m.$$

Этим эквивалентом — в общем виде и в частных случаях — он неоднократно пользовался в своих работах, не пытаясь как-либо оправдать его доказательным рассуждением, и лишь в 1895 г. сформулировал указанное допущение в виде теоремы, подлежащей доказательству. В 1904 г. Э. Цермело, введя аксиому в формах 2—3 и доказав с ее помощью теорему о возможности вполне упорядочить всякое множество, получил как следствие принцип трихотомии. Наконец в 1915 г. Ф. Хартогс (или Гартогс) доказал и обратную импликацию, т. е. что аксиома выбора следует из названного принципа.

Другой эквивалент ввел в 1883 г. тоже Кантор. Не совсем четко определив общее понятие вполне упорядоченного множества, он в качестве «основного закона мышления» высказал принцип вполне упорядочения: всякому строго определенному множеству можно придать форму вполне упорядоченного множества³. Тем самым принципу вполне упорядочения был придан статус общелогической аксиомы. Кантор пообещал возвратиться к нему в одной из своих следующих работ, но это обещание не выполнил. Им он пользовался во многих теоретико-множественных рассуждениях, особенно часто применяя его частные случаи. Однако к 1895 г. у Кантора определенно возникли сомнения в названном принципе: он не упоминает о нем, а предложения теории множеств, легко получаемые из него, опять-таки формулирует в виде теорем, подлежащих доказательству.

Например, непосредственное следствие принципа вполне упорядочения, что всякое кардинальное число является алефом⁴, — еще одна метаморфоза аксиомы выбора — Кантор в письме Р. Дедекинду от 28 июля 1899 г. выставляет как подлежащую доказательству теорему и делает попытку доказать ее, опираясь на соображения, связанные с упомянутым выше понятием класса. Независимо от Кантора (его письмо Дедекинду было опубликовано только в 1932 г.) к аналогичным соображениям в связи с той же метаморфозой пришел в 1904 г. Ф. Журден.

Упомянутое выше доказательство Цермело теоремы о возможности вполне упорядочить всякое множество явилось вместе с тем и доказательством эквивалентности аксиомы выбора и принципа вполне упорядочения, поскольку существование выбирающей функции f в формулировке 2 сразу же получается из этого принципа. Это обстоя-

² Понятие класса, расширяющее понятие множества, вошло в математику позднее. Под принципом селекции понимаются утверждения, в которых роль выбираемых в множествах X элементов (или значений функции f) играют подмножества этих множеств.

³ Термин «упорядоченное множество» употребляется в разных смыслах. Если упорядоченное множество определить как такое множество M , для элементов которого установлено отношение R , удовлетворяющее условиям: xRx не выполняется ни для какого $x \in M$; для любых $x, y \in M$ имеет место или xRy или yRx ; если xRy и yRz , то xRz , $x, y, z \in M$, тогда под вполне упорядоченным множеством понимается такое упорядоченное множество, каждое непустое подмножество которого имеет первый элемент.

⁴ Алеф — кардинальное число (или мощность) вполне упорядоченного множества.

тельство отметил в 1905 г. Э. Борель, введя, по-видимому, впервые термин «эквивалент аксиомы выбора».

В 1890 г. Д. Пеано, доказывая теорему о существовании решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными правыми частями, применил схему рассуждений, содержащую обращение к функции множества $f(X)$, заданной на бесконечном семействе S множеств X и принимающей на каждом X значения из этого X , т. е. фактически основанную на аксиоме выбора. По существу он сформулировал при этом и саму аксиому в форме 2, но тут же признал незаконным всякое математическое рассуждение, в котором используется такая аксиома. Следовательно, исторически первая формулировка 2 была признана ее автором недопустимой в качестве доказательного средства. Чтобы все же оправдать теорему о существовании решения указанной системы дифференциальных уравнений, Пеано перестроил свои рассуждения с целью избежать обращения к осужденной им аксиоме. Он в то время полагал, что это ему удалось сделать, но в 1908 г. признал, что и в перестроенном им доказательстве 1890 г. обращение к аксиоме выбора содержится.

Небезынтересно, что и первая более или менее явная формулировка аксиомы выбора в виде 1 показалась ее автору Р. Беттаци тоже неприемлемой. Занимаясь теоретико-множественным обоснованием арифметики в духе Дедекинда, он при анализе одного из рассуждений последнего заметил в 1896 г. неосознанное применение там аксиомы выбора вида 1, сформулировал ее как особый постулат, принятие которого оправдало бы ход мыслей Дедекинда, но посчитал неуместным вводить такой постулат.

Одной из довольно любопытных метаморфоз аксиомы выбора является относительно мало известное объединение двух «примитивных предложений» Ч. Бурали-Форти, выставленных им при разных ситуациях. Занимаясь, как и Беттаци, теоретико-множественным построением арифметики, он пришел к заключению, что ряд арифметических теорем он не в состоянии доказать без введения особого «примитивного предложения PpI » (постулата, аксиомы), состоящего в утверждении, что если произвольное множество M разбито на части (подмножества), попарно не имеющие общих элементов, то мощность множества частей не превосходит мощности исходного множества M . Принятие его позволило Бурали-Форти получить интересовавшие его теоремы арифметики. Этим же PpI , не вводя его явно, широко пользовался и Ф. Бернштейн в 1901 г. На последнее обстоятельство в 1902 г. обратил внимание Б. Леви, установив вместе с тем, что PpI можно доказать при помощи принципа вполне упорядочения или аксиомы выбора в форме 1 (к которым он, впрочем, относился отрицательно, хотя неосознанно и прибегал к ним в своих рассуждениях).

Второе «примитивное предложение $PpII$ » Бурали-Форти предложил при анализе еще одной метаморфозы рассматриваемой аксиомы, а именно сформулированной Кантором без доказательства теоремы: если M и N — два произвольных непустых множества, то одно из них эквивалентно некоторому подмножеству другого (ее Кантор высказал в 1895 г. в несколько иной формулировке как следствие принципа трихотомии). Бурали-Форти решил доказать ее и для этой цели ввел свое $PpII$, которое можно передать так: если M и N — два произвольных непустых множества и никакое однозначное отображение M на N не приводит ко всему множеству N (не является отображением M на N), то мощность множества M меньше мощности множества N . Очевидно, что это $PpII$ получается из принципа трихотомии для мощностей, а следовательно, в силу установленной Хартогсом эквивалентности последнего аксиоме выбора, и из нее. Однако в 1897 г. принцип трихотомии считался недоказанным, поэтому-то Бурали-Форти принял ослабленный его вариант за новую аксиому.

Пользуясь PpI и $PpII$, Бурали-Форти изобретательно установил, что вместе они позволяют доказать предыдущую теорему Кантора. Таким образом, из результатов Бурали-Форти, Леви и Хартогса следует, что объединение PpI и $PpII$ представляет собой новую метаморфозу аксиомы выбора, своеобразную в том отношении, что эта аксиома, так сказать, расщепляется на два «примитивных предложения» Бурали-Форти.

Целый букет эквивалентов рассмотрел в 1901 г. Ф. Бернштейн. Три из них таковы:

1) если m, n, p, q — кардинальные числа, то неравенства $m > n$ и $p > q$ имеют следствием неравенство $m + p > n + q$;

2) для бесконечных кардинальных чисел m и n справедливо равенство

$$m+n=mn;$$

3) для бесконечного кардинального числа m верно равенство

$$m^2=m.$$

Бернштейн не считал, естественно, эти утверждения эквивалентами аксиомы выбора, поскольку к 1901 г. эта аксиома еще не закрепилась в математике, хотя применялась и в указанных выше формах, и в виде эквивалентов. Он рассматривал как недосказанные предложения о возможности вполне упорядочить всякое множество, о сравнимости любых мощностей и т. п.; аксиому же выбора, предложенную ему и Кантору итальянцем Б. Леви в качестве доказательного средства, он не захотел принять. У него, скорее, имело место получение одного эквивалента из какого-либо другого, например доказательство сравнимости кардинальных чисел из равенств 2), 3). То, что равенства 1)—3) представляют собой эквиваленты аксиомы выбора, установил в 1924 г. А. Тарский; он же, а затем и некоторые другие математики обнаружили еще несколько десятков аналогичных метаморфоз этой аксиомы.

В 1902 г. А. Уайтхед (при участии Б. Рассела), введя понятие мультипликативного класса для произвольного семейства непересекающихся множеств, т. е. декартова произведения множеств этого семейства, молчаливо принял гипотезу, что если ни одно из рассматриваемых множеств не будет пустым, то не пустым будет и их произведение. Понятием мультипликативного класса Уайтхед широко пользовался при разработке теории кардинальных чисел. Тем самым в обиход была введена еще одна метаморфоза рассматриваемой аксиомы, отличающаяся от формы 3 дополнительным предположением о непересечении множеств рассматриваемого семейства. В явном виде указанную метаморфозу ввел в 1906 г. Б. Рассел под наименованием мультипликативной аксиомы, поставив вопрос о взаимоотношении ее с формой 3. В 1908 г. Э. Цермело доказал эквивалентность этих двух формулировок.

В той же работе 1902 г. А. Уайтхед фактически ввел некоторые новые эквиваленты. Высказанная им без доказательства теорема: если m и n — кардинальные числа, m — бесконечно и $m \geq n$, то

$$mn=m,$$

содержала в себе два из них. При $m=n$ она приводит к равенству Бернштейна $m^2=m$, а при $m > n$ — еще к одной метаморфозе, эквивалентность которой аксиоме выбора была установлена Б. Собоцинским только в 1960 г.

Еще одной метаморфозой, появившейся до введения в 1904 г. Э. Цермело самой аксиомы выбора, оказалась так называемая теорема Кёнига, состоящая в утверждении, что если каждому элементу m множества M поставлены в соответствие два кардинальных числа a_m и b_m , удовлетворяющие условию $a_m < b_m$, то сумма всех a_m меньше произведения всех b_m .

Ее частный случай, когда множество M счетно, сформулировал и доказал Д. Кёниг на Международном конгрессе математиков в 1904 г., отметив вместе с тем возможность обобщения. В общем же виде эта теорема была доказана в 1907 г. И. И. Жегалкиным, а в 1908 г. Э. Цермело и Ф. Журденом. Их доказательства фактически были и доказательствами эквивалентности данной теоремы аксиоме выбора.

Таким образом, к 1904 г. в различного рода математических исследованиях появились как все три приведенные в начале формулировки, так и около десятка их эквивалентов, не говоря уже о частных случаях, постоянно применявшихся в математических рассуждениях. Оставалось как будто сделать немного: сформулировать нужную аксиому с полной определенностью и, быть может, доказать с ее помощью какое-либо интересное математическое предложение, особенно если его доказательство не поддавалось усилиям математиков. Это и сделал Э. Цермело в 1904 г., предложив вторую и третью формулировки аксиомы выбора и доказав теорему о возможности вполне упорядочить всякое множество; простыми следствиями из этого оказывались многие из рассмотренных выше предложений. Казалось бы, теперь перед аксиомой выбора вместе с ее метаморфозами открылась широкая дорога в математику. Однако дело обернулось по-иному.

Выше упоминалось отрицательное отношение Д. Пеано и Р. Беттацци к рассматриваемой аксиоме, а также констатировались сомнения, явно не выраженные, но определенно заметные, Г. Кантора, Ч. Бурали-Форти, Ф. Бернштейна, Б. Леви в справедливости таких ее эквивалентов, как принципы трихотомии и вполне упорядочения. Более или менее явно последние поставил под сомнение Э. Борель в 1898 г. и Б. Рассел вполне определенно в 1903 г.

Отчасти поэтому результаты Цермело 1904 г. встретили решительную оппозицию со стороны многих ведущих ученых того времени. С 1905 г. началась большая полемика по поводу допустимости в математике рассуждений, основанных на использовании аксиомы выбора и ее эквивалентов. Эта полемика, начатая во Франции Э. Борелем и в Англии Э. Гобсоном, сразу же оказалась переплетенной со спорами по поводу обнаруженных к тому времени парадоксов теории множеств, вскрытых непредикативностей ряда разных рассуждений и т. д. В нее включилось большое число математиков.

Участников дискуссии об аксиоме выбора можно с некоторой условностью разбить на следующие категории. Одни выступали за безоговорочное признание этой аксиомы; сам Цермело назвал ее новым законом логики, несводимым к известным ранее и необходимым для получения важных математических результатов. К нему присоединились Ж. Адамар, Г. Харди, а после некоторых колебаний и Ф. Журден; Д. Гильберт первоначально не высказывал (по крайней мере в опубликованных работах) своего отношения, но впоследствии присоединился к сторонникам аксиомы выбора. Другие не выступали с декларациями о признании, а просто получали те или иные математические результаты с довольно явным подчеркиванием того обстоятельства, что эти результаты устанавливаются с помощью данной аксиомы или ее эквивалентов; к их числу принадлежали Ч. Арцела, М. Фреше, Д. Витали, Г. Гамель, И. И. Жегалкин. Э. ван Флек и др.; быть может, особенно важным оказалось применение теоремы о вполне упорядочении Э. Штейнцем в 1910 г. в теории алгебраических расширений.

В стане открытых противников оказались Э. Борель, Р. Бэр, А. Лебег, Э. Гобсон, Д. Кёниг, Д. Пеано и некоторые др. Наконец, на несколько неопределенных позициях стояли Б. Рассел и А. Пуанкаре: первый подчеркивал необходимость мультипликативной аксиомы в ряде вопросов, но в то же время допускал возможность ее доказательства или опровержения, выражая надежду именно на последнее; второй считал неизбежными применения этой аксиомы, указывал на несбыточность надежд Рассела доказать или опровергнуть ее, но в то же время не признавал из-за непредикативности корректности доказательства Цермело теоремы о вполне упорядочении и даже вообще отвергал теорию множеств.

Что же послужило основанием для непринятия аксиомы выбора столь большой группой ведущих математиков? Причин для этого было много, и, по-видимому, главными из них были две следующие.

Одной из парадигм математики является идеал однозначности. Высшими ее достижениями считаются строго (однозначно) определенные понятия, жестко построенные алгоритмы, единственные решения тех или иных задач и уравнений, однозначные функциональные зависимости, абсолютно сравнимые величины, вполне упорядоченные множества, последовательно арифметизированные рассуждения (с признанием единственности арифметики натуральных чисел), жестко детерминированные дедуктивные системы и т. п. Аксиома выбора явно противоречит этому идеалу: выбираемые с ее помощью множества или функции определяются не единственным образом; их существование принимается, но принципиально не дается средства предпочесть что-либо одно. Называя рассуждение, проводимое при помощи этой аксиомы только грезой, Н. Н. Лузин утверждал, что, говоря о выборах, ее сторонник «выбирает и грезит по-своему, и нет не только возможности сообщить своему собеседнику о проделанных в бесконечном количестве выборах, но и быть согласным даже с самим собой» [3, с. 511].

Следующей причиной была сложившаяся в XIX в. идея логицизма. Сторонники сведения математики к логике проделали огромную работу с целью установить, что все здание математики может быть воздвигнуто на фундаменте ограниченного числа логических понятий и способов умозаключений. Аксиома выбора выставилась Цермело (а еще ранее Кантором в форме принципа вполне упорядочения) как новый постулат логики, несводимый к известным ранее и вместе с тем необходимый в дедуктивных построениях. Тем самым ставилась под сомнение корректность уже осуществленного,

казалось бы, сведения математики к логике. К тому же возникало предположение о возможности существования и других новых логических принципов. Естественно, что один из главных представителей этого течения, Д. Пеано, не соглашался принять новую аксиому, а другой — Б. Рассел — колебался.

Поэтому споры об аксиоме выбора сразу же приняли принципиальный характер. Первый их этап не привел к решению вопроса о ее статусе в математике, так как оппоненты не убедили друг друга.

Постепенно, однако, начала набирать силу тенденция, намеченная И. И. Жегалкиным, Ф. Журденом и Э. Цермело в 1907—1908 гг.: выявлять математические предложения, доказательство которых зависит от аксиомы выбора или ее эквивалентов, и освобождаться от них, когда это возможно. Она особенно проявилась несколько позднее в трудах представителей польской школы во главе с В. Серпинским. На этом пути были выявлены многочисленные математические предложения, связанные с нею, в частности были получены многие эквиваленты, в том числе и упоминавшиеся предложения теории кардинальных чисел.

Вместе с тем рассматриваемая аксиома стала прокрадываться в математику в новом одеянии — в форме так называемых экстремальных (чаще максимальных) принципов. Их в различных вариантах и в самых разнообразных ситуациях применяли без явных формулировок, а также формулировали в общем виде и в частных случаях Ф. Хаусдорф (1907, 1909, 1915, 1927 гг.), З. Янишевский (1910—1912 гг.), С. Мазуркевич (1910 г.), Л. Зоретти (1910—1912 гг.), Л. Брауэр (1911 г.), С. Бохнер (1928 г.), Р. Мур (1932 г.), а затем и др. Рассмотрим только один из них, получивший наибольшую известность, а именно лемму Цорна, в том виде, в каком ее предложил сам автор.

М. Цорн в 1935 г., назвав множество множеств B *цепью*, если для любых двух множеств из B выполняется условие, что одно из них является подмножеством другого, а множество U множеств A *замкнутым*, если U содержит сумму множеств любой цепи B , содержащейся в U , он выставил такое утверждение: в замкнутом множестве U множеств A существует по крайней мере одно множество A^* , которое не является правильным подмножеством никакого другого множества A из U .

Цорн показал, как с помощью этого утверждения значительно короче получаются некоторые алгебраические результаты из теории полей, колец, идеалов, и пообещал доказать, что сформулированная им лемма эквивалентна аксиоме выбора или теореме о вполне упорядочении. Он не выполнил своего обещания, и трудно сказать, кто, когда, насколько корректно установил эту эквивалентность, так как, с одной стороны, многие из названных выше авторов экстремальных принципов получали их с помощью аксиомы выбора или какого-либо из ее эквивалентов, а с другой — последние выводились из максимальных принципов, формулируемых обычно иначе, чем у Цорна. Например, А. Уоллес в 1944 г. утверждал, что указанная эквивалентность хорошо известна, но что к этому времени опубликованных доказательств этого не имеется; сам он доказал эквивалентность двух видов максимальных принципов. Кажется, лишь Г. Биркгоф в 1948 г. установил равнозначность аксиомы выбора и леммы Цорна (в отличной от приведенной форме).

Еще в одном, уже чисто топологическом одеянии аксиома выбора вынырнула в 1929—1935 гг. Для описания новой метаморфозы приведем несколько определений.

Пусть задано произвольное множество X . Пусть, далее, в X выделено некоторое семейство B подмножеств, называемых открытыми, которое обладает свойствами:

- а) все множество X , а также пустое множество принадлежат B ;
- б) объединение любого числа и пересечение любого конечного числа открытых множеств являются открытыми множествами, т. е. принадлежат семейству B .

Когда множество X с выделенным таким образом семейством открытых множеств называется топологическим пространством (X, B) , а семейство B — топологией в X .

Топологическое пространство (X, B) называется бикompактным, если из всякой системы открытых множеств, объединение которых дает (X, B) , можно выделить конечную подсистему, обладающую тем же свойством.

В 1929 г. А. Н. Тихонов рассмотрел декартово произведение единичных отрезков $0 \leq t \leq 1$, причем множество таких отрезков имело произвольную мощность τ , и, введя в этом произведении топологию, сделал его топологическим пространством R_τ . Пользуясь частными случаями аксиомы выбора, А. Н. Тихонов доказал, что R_τ является биком-

пактным пространством. Каждый из отрезков $0 \leq t \leq 1$ с топологией открытых множеств из $[0, 1]$ представляет собой бикompактное пространство, поэтому установленная им бикompактность пространства R_t фактически оказывалась частным случаем общего утверждения: произведение бикompактных пространств бикompактно. К такой общей формулировке и пришел А. Н. Тихонов в 1935 г., определив соответствующую топологию в произведении произвольной мощности бикompактных пространств. Доказывать эту общую теорему он не стал, ограничившись замечанием, что это можно сделать так же, как и в случае пространства R_t . Так была получена одна из важнейших теорем топологии, известная под названием первой теоремы Тихонова. После ее опубликования появились различные варианты доказательств, например Д. Александера 1939 г., причем в каждом из них в конечном счете использовалась аксиома выбора. Названная теорема нашла многообразные применения, начиная с работы А. Н. Тихонова 1935 г., а особенно после того, как Я. Лось и Ч. Рыль-Нардзевский в 1951 г. применили ее для получения ряда теорем существования в топологии и функциональном анализе.

Около 1950 г. Ш. Какутани высказал предположение, что из теоремы Тихонова можно получить аксиому выбора. В 1950 г. Д. Л. Келли доказал это предположение, и с тех пор данная теорема стала рассматриваться как еще один эквивалент этой аксиомы.

Нарядилась аксиома выбора и в логико-математические одежды. В 1936 г. А. Н. Мальцев сформулировал и доказал принцип компактности: для того чтобы бесконечное (любой мощности) множество M формул исчисления высказываний было непротиворечивым, необходимо и достаточно, чтобы непротиворечивым было всякое конечное подмножество множества M . В 1941 г., переформулировав этот принцип для исчисления предикатов и передоказав его (с помощью теоремы о вполне упорядочении), А. И. Мальцев применил названный принцип для получения ряда предложений алгебры. Принципу компактности тоже были приданы весьма разнообразные формы, он также отказался широко применимым средством математических рассуждений, особенно после того, как в 1947 г. А. Г. Курош и С. Н. Черников перевели метод Мальцева доказательства алгебраических теорем на теоретико-групповой язык и когда ряд других математиков (Л. Хенкин, 1953 г.; Б. Нейман, 1954; А. Робинсон, 1955 г.) получили сходные результаты. Как и в случае максимальных принципов, трудно сказать, кому принадлежит обратное заключение, т. е. утверждение, что аксиома выбора следует из принципа компактности.

В связи с теоремой Тихонова и принципом компактности Мальцева целесообразно сказать несколько слов о ситуации с аксиомой выбора, сложившейся в среде советских математиков в конце 20-х и в 30-е годы. Глава отечественной теории функций и множеств Н. Н. Лузин был решительным противником этой аксиомы и ее применений в математических рассуждениях (хотя фактически пользовался ею в своих работах, как, впрочем, и другие ее противники). Выше уже приводилась одна его характеристика названной аксиомы, высказанная в 1927 г. в докладе на Первом Всероссийском съезде математиков. Годом раньше он не менее красноречиво назвал применения аксиомы выбора «жонглированием соединениями пустых слов, смыслу которых не соответствует никакой интуитивно доступный факт» [4, с. 352], а в 1934 г. писал, что «математические сущности, сформированные при помощи ее, не крепки, не обладают устойчивостью, имея слишком расплывчатые, неопределенные свойства, чтобы практически служить затем точкой опоры для математических рассуждений» [5, с. 354].

И вот на этом фоне выступают молодые тогда математики А. Н. Тихонов и А. И. Мальцев, воспитанники того же университета, где «математически царствовал» Н. Н. Лузин, со своими первыми большими результатами, которые были получены при помощи аксиомы выбора и даже оказались просто ее метаморфозами. Эти результаты находят широкие применения как у самих авторов, так и у многих других ученых, отечественных и зарубежных. Неизвестно, как отнесся к этому Н. Н. Лузин, но, возможно, отчасти это заставляло его как-то переосмысливать проблему аксиомы выбора, и не исключено, что не без связи с этим у него как-то в конфиденциальной беседе вырвались слова, приведенные в воспоминаниях П. С. Александрова: «Я дни и ночи думаю над аксиомой Цермело. Если бы только кто-нибудь знал, что это за вещь!» [6, с. 20].

Здесь коротко рассказано лишь о небольшом числе метаморфоз аксиомы выбора. Их гораздо больше, причем число их постоянно растет, и в их совокупности они прони-

зывают всю современную математику от элементарных арифметики и геометрии до самых возвышенных нынешних теорий. Эта аксиома «стала привычной для любого работающего математика» (Ю. И. Манин, [7, с. 53]), а рассуждения, проводимые, например, в рамках аксиоматической системы теории множеств Цермело — Френкеля, включающей ее, «удовлетворяют требованиям» „строгости“ современной математики» (Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин, [8, с. 99]).

В заключение немного о нематематическом слове «метаморфоза». Оно довольно расплывчато, и математики им не пользуются, применяя в описанных ситуациях кажущийся точным (однозначным) термин «эквивалент». Однако, быть может, именно первый из этих терминов лучше выражает существо дела.

Действительно, в настоящее время образцом математической строгости является жесткое формально-дедуктивное построение соответствующей теории. В частности, два утверждения считаются эквивалентными, если одно из них может быть получено из другого и обратно в рамках некоторой аксиоматической конструкции. Это же относится и к аксиоме выбора. Но сейчас имеется много довольно различных аксиоматических теорий множеств, и априори не исключена возможность эквивалентности двух утверждений в пределах одной аксиоматизированной теории и их неэквивалентности в другой. В последние годы такая априорная возможность стала реальностью: исследованиями Р. Говарда, А. Рабина и Ж. Рабина (1977—1978 гг.) обнаружено, что некоторые формы аксиомы выбора как для множеств, так и для классов оказались невыводимыми друг из друга, а формулировки, считавшиеся ранее эквивалентными, не оказались таковыми в разных аксиоматических теориях множеств. Но тем самым термин «эквивалент аксиомы выбора» теряет вкладывавшийся в него ранее однозначный смысл, становится расплывчатым.

Литература

1. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.-Л.: ОНТИ, 1937.
2. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
3. Лузин Н. Н. Современное состояние теории функций действительного переменного. — Собр. соч., т. II. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
4. Лузин Н. Н. Мемуар об аналитических множествах. — Там же.
5. Лузин Н. Н. О строении измеримых функций. — Собр. соч., т. I. М.: Изд-во АН СССР, 1953.
6. Александров П. С. Лузинская математическая школа. — Математика в школе, 1977, № 5.
7. Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое. М.: Сов. радио, 1979.
8. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Наука, 1979.

ТРИГОНОМЕТРИЯ АН-НАСАВИ

Н. Г. ХАЙРЕДИНОВА (Егорьевск)

Абу-л-Хасан'Али ибн Ахмад ан-Насави (970—1070), уроженец г. Насы, вблизи нынешнего Ашхабада, ученик Кушияра ал-Джили, работал при дворе бундских султанов в Рее или Исфагане, а после завоевания Ирана Махмудом Газневи — при его дворе в Газне.

Ан-Насави принадлежит тригонометрический трактат «Книга насыщения комментариями о теореме о секущих» (Китаб а-ншба' фи шарх шакл ал-кита'). Теорема о секущих — это теорема Менелая о полном четырехстороннике, доказанная Менелаем Александрийским в его «Сферике» [1, с. 289]. Ее применял Птолемей в своем «Алмагесте» для решения задач сферической тригонометрии [2].

Рукопись трактата, переписанная в 1230 г., хранится в Лейденской университетской библиотеке (№ 556/4, 24 л.) [3].

«Книга насыщения» состоит из трех разделов:

1) о предпосылках и комментариях к предложениям, в которых Птолемей определяет хорды, вписанные в круг, с помощью предложений и доказательств Евклида;