# *Краткие сообщения*

Е. А. ЕФИМОВА

## К ИСТОРИИ СИМВОЛИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. Символическое, или операционное, исчисление позволяет сводить задачи анализа к алгебраическим. Например, символические, или операторные, методы решения дифференциальных уравнений состоят в том, что с помощью некоторого преобразования от исходного дифференциального уравнения переходят к алгебраическому, более «простому», а после исследования последнего «возвращаются обратно».

В последнее время возникло далеко идущее расширение операционного исчисления — микролокальный анализ, который стал мощным средством исследования в современной математике, прежде всего, в теории дифференциальных уравнений с частными производными. В современной форме он появился в середине 60-х гг. и связан с именами Дж. Кона, Л. Ниренберга, В. П. Маслова и др.

Микролокальный анализ позволил достичь значительных результатов в области дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Еще в 60—70-е гг. с его помощью В. П. Маслову удалось создать общий операторный метод решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (см. [1]). При этом, как он отмечает, он опирался на идею известного американского физика Р. Фейнмана (см. [2]) о том, что «если порядок действия операторов определяется индексами, то операторы становятся как бы коммутирующими» [1, с. 10]. Ниже будет, в частности, показано, что эта идея возникла значительно раньше, во второй половине XIX в., но впоследствии была забыта.

В. П. Маслов исходил из операционного исчисления О. Хевисайда, которое исторически следует рассматривать как продолжение разрабатывавшегося в первой половине XIX в. французскими и британскими математиками символического исчисления (см., например: [3]). Исчисление Хевисайда (как и символическое исчисление) было хорошо приспособлено к решению дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Соответствующие результаты известны специалистам, им посвящена значительная историко-математическая литература (например, [3], [4, с. 116—128] и др.). Значительно менее известными оказались энергичные попытки, предпринимавшиеся британскими математиками 40—60 гг., разработать аналогичные методы для уравнений с переменными коэффициентами. Лишь в самое последнее время они стали объектом внимания историков (см. [4, 5]).

2. Отметим, что в XIX в. характер символического исчисления был несколько иным, чем в нынешнем, когда, после обоснования работ О. Хевисайда, предпринятом в первые десятилетия XX в., в операционное исчисление прочно вошли интегральные преобразования. Попытки использовать их для обоснования символического исчисления предпринимались уже О. Коши, однако в XIX в. они не обратили на себя особого внимания. Математики просто отделяли функции, содержащие оператор дифференцирования, от их объектов и обращались с ними как с алгебраическими величинами. При этом им, естественно, приходилось решать вопросы интерпретации полученных символических формул. Об обосновании своих действий они совершенно не заботились.

Приведем маленький пример применения символического исчисления к решению дифференциальных уравнений. Уравнение $u'(x) - 3u(x) = f(x)$ можно записать в виде $(D - 3)u = f$, где $D = \frac{d}{dx}$, откуда сразу получается «символическое» решение $u = \frac{1}{D-3}f(x)$. Для его интерпретации используется «теорема смещения»:

$$De^{ax}y = e^{ax}(D + a)y.$$

Поэтому $\frac{1}{D-3}f(x) = e^{3x}D^{-1}e^{-3x}f(x)$, где $D^{-1}$ — неопределенный интеграл, и, наконец, общее решение уравнения имеет вид: $u = e^{3x}\int e^{-3x}f(x)dx$.

Об условиях применимости такого рода методов, например, об условиях на функцию $f$, в XIX в. не было и речи.

ВИЕТ. 1994. № 4. С. 144—147. © Е. А. Ефимова

В случае уравнений с переменными коэффициентами возникают трудности, связанные с тем, что оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$ не коммутирует с оператором умножения на $x$. Для их преодоления знаменитый английский математик Джордж Буль (1815—1864) в работе [6] (1844) предложил использовать законы коммутации, т. е. соотношения, с помощью которых можно было бы переставлять степени (положительные и отрицательные) этих операторов. Одним из основных соотношений было равенство:

$$\rho^n f(\pi)u = f(\pi - n)\rho^n u \tag{1}$$

где $f(x)$ — функция, раскладывающаяся в ряд по целым степеням $x$ (в действительной области, здесь и всюду в этой статье). Обычно брали операторы $\rho = x$, $\pi = \frac{d}{dx}$*. Свои методы Дж. Буль разрабатывал для решения линейных дифференциальных уравнений с рациональными (полиномиальными) коэффициентами, записывая их с помощью соотношения (1) в символическом виде:

$$\varphi_0\left(\frac{d}{d\theta}\right)u + \varphi_1\left(\frac{d}{d\theta}\right)e^{\theta}u + \varphi_2\left(\frac{d}{d\theta}\right)e^{2\theta}u + \ldots = U(\theta), \tag{2}$$

используя замену $x = e^{\theta}$. В качестве общего метода он предложил решение уравнения (2) в рядах, но основное внимание уделялось им поиску классов уравнений, разрешимых в конечном виде. Как правило, исследования направлялись на то, чтобы свести эти уравнения к системам двучленных уравнений и создать готовые формулы решения последних. Например, большое значение имела найденная Булем (1845) формула (см. о ней [5]):

$$f\left(\frac{d}{dx} + \varphi'(x)\right) = e^{-\varphi(x)}f\left(\frac{d}{dx}\right)e^{\varphi(x)} \tag{3}$$

(здесь можно было бы провести параллель с современной формулой коммутации гамильтониана с экспонентой (см. [1])).

Имена большинства из последователей Дж. Буля — Б. Бронвина, Ч. Харгрева, Р. Кармайкла, Ч. Грейвса, В. Споттисвуда, А. Кортиса, Г. Грира, С. Робертса и В. Рассела — вряд ли могут сказать что-либо современному читателю. Разве только В. Донкин оставил после себя яркий след в истории аналитической механики**. Все они преподавали в университетах Англии и Ирландии. Не все были профессиональными математиками, но в творчестве каждого математика занимала видное место. Большинство из них состояли членами Лондонского Королевского общества или Королевской академии Ирландии.

В течение двадцати лет после появления работы Буля [6], они пытались создать символические методы интегрирования дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Многие из их результатов (но далеко не все) вошли в трактат Буля [8] (см. также [9]). Однако значительного успеха на этом пути им достичь не удалось. Их результаты оказались забытыми. Обратили на них внимание сравнительно недавно (см. [4, 5]). Оказалось, что их работы представляют большой историко-научный интерес. В настоящей заметке мы покажем, что они содержат, в частности, идею, к которой впоследствии пришел Р. Фейнман, и неизвестный ранее оригинальный метод решения уравнения Бесселя.

3. Среди тех, кто вслед за Булем изучал свойства некоммутирующих дифференциальных операторов, был известный английский математик и астроном Вильям Донкин (1814—1869). Он с детства проявил блестящие способности к языкам, математике и музыке. В возрасте 18 лет он поступил в Оксфордский университет, через четыре года получил степень бакалавра, а еще через три — магистра. В течение ряда лет он читал там лекции по математике, а с 1842 г. занял должность профессора астрономии (которую занимал до самой смерти). Вскоре он был избран членом Лондонского Королевского общества и Королевского Астрономического общества. Ему принадлежит ряд важных результатов по математике, астрономии и физике, а его работа по акустике показывает его глубокие познания в теоретической и практической музыке (более подробно биографию В. Донкина см. в: [10, с. 220]).

В 1850 г. В. Донкин опубликовал небольшую работу по символическому исчислению [11], где впервые появились коммутаторы дифференциальных операторов $\omega$ и $\rho$ в современных

---

* В 1861 г. английский математик Вильям Рассел, используя соотношение (1), создал даже своеобразную алгебру полиномов от этих операторов по аналогии с алгеброй обычных многочленов (см. [7]).

** См., например: История механики с конца XVIII в. до середины XX в. М., 1972. С. 26—30.

обозначениях, вида: $[\omega, [\omega, \ldots [\omega, \rho] \ldots ]]$, где $[\omega, \rho] = \omega\rho - \rho\omega$. Он получил при этом интересные операторные разложения. Например, если $f(x)$ — функция, раскладывающаяся в ряд по целым степеням $x$, то выполняется следующее равенство:

$$[f(\omega), \rho] = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k f^{(k)}(\omega),$$

где $\rho_k = \underbrace{[\omega, [\omega, \ldots, [\omega}_{k \text{ раз}}, \rho] \ldots ]]$. Если взять $\omega = D = \dfrac{d}{dx}$, $\rho = X(x)$, то получится формула, которую ранее (в 1848 г.) вывел Чарльз Харгрев:

$$[f(D), X] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} X^{(k)}(x) f^{(k)}(D)$$

(об этой формуле см. [12]). В. Донкин получил также рекуррентное соотношение:

$$f^{(n+1)}(D) = [f^{(n)}(D), x]^*,$$

с помощью которого вывел следующее разложение:

$$\varphi\left(\frac{d}{dD}\right) f(D) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k f(D) \varphi^{(k)}(x), \tag{4}$$

где $\varphi$ — функция, представимая рядом Тейлора.

На эту формулу обратил внимание в 1879 г. в работе [13] ирландский математик Морган Вильям Крофтон (1826—1915), которому принадлежит ряд статей по интерпретации символических формул. В то время он был профессором математики в Королевской военной академии в Вулидже**. М. Крофтон распространил формулу (4) на более общий случай, когда функция $\varphi$ раскладывается в ряд по целым, положительным или отрицательным, степеням $x$. При этом он записал ее в виде:

$$\varphi\left(\frac{d}{dD}\right) f(D) X(x) = f(D) \varphi(x - \dot{x}) X(x), \tag{5}$$

где $\dot{x}$— «переменная, независимая от $x$, но совпадающая с ней после действия оператора $f(D)$» (в обозначениях В. П. Маслова (см. [1]) формулу (5) можно было бы записать в виде:

$$\varphi\left(\frac{d}{dD}\right) f(D) X(x) = \overset{2}{f}(D) \varphi(\overset{1}{x} - \overset{3}{x}) X(x)).$$

Здесь впервые появилась вышеупомянутая идея Р. Фейнмана. Формула (5) дает первый пример упорядоченных операторов, а формула (4) — ее «распутанный» (см. [2]), т. е. «обычный», вид.

Взяв $\varphi(x) = e^{hx}$, М. Крофтон получил, как простейшее следствие из формулы (5), известное соотношение: $e^{h\frac{d}{dD}} f(D) X(x) = e^{-hx} f(D) e^{hx} X(x)$, где $e^{h\frac{d}{dD}} f(D) = f(D + h)$.

Вернемся к В. Донкину. Как и другие математики Британской школы символического исчисления, он использовал это исчисление для решения известных дифференциальных уравнений. В частности, ему принадлежит, по-видимому, самый короткий и простой символический способ решения уравнения Бесселя (см. [14]). При этом он удачно использовал некоторые идеи Буля, оставленные последним без применения (о символическом способе решения уравнения Бесселя, принадлежащем Булю, см. [5]; см. также [15, гл. IV]).

Решая уравнение Бесселя $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \left(k^2 - \dfrac{n(n+1)}{x^2}\right) u = 0$, В. Донкин заметил, что

---

* Отметим, что такого рода соотношения были известны еще французскому математику Б. Бриссону (см. [12]).

** Биографию М. В. Крофтона см. в: *Crone J. S.* A concise dictionary of Irish biography. Dublin, 1928.

$$D^2 - \frac{n(n+1)}{x^2} = \left(D - \frac{n}{x}\right)\left(D + \frac{n}{x}\right), \text{ и } \left(D + \frac{n}{x}\right)\left(D - \frac{n}{x}\right) = \left(D - \frac{n-1}{x}\right)\left(D + \frac{n-1}{x}\right),$$

где $D = \frac{d}{dx}$. Осуществляя последовательно замену: $u = \left(D - \frac{n}{x}\right)v_1$, $v_1 = \left(D - \frac{n-1}{x}\right)v_2$, ..., он получил в итоге очень простое уравнение: $(D^2 + k^2)v_n = 0$. Учитывая, что $D - \frac{m}{x} = x^m D x^{-m}$, $m = 1, \ldots n$, он нашел решение уравнения Бесселя: $u = x^n\left(D\frac{1}{x}\right)^n (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx)$ ($C_1, C_2$ — произвольные постоянные).

К середине 60-х гг. прошлого века исследования, связанные с разработкой символических методов решения дифференциальных уравнений, были прекращены. По-видимому, было бы трудно ожидать иного на том уровне развития математики. Понадобилось ровно сто лет, чтобы необходимый для реализации этих идей уровень был достигнут.

**Список литературы**


1. *Маслов В. П.* Операторные методы. М., 1973.
2. *Feynman R.* An operator calculus having applications in quantum electrodynamics // Phys. Rev. 1951. V. 84. P. 108—128. На рус. яз. в кн.: Проблемы современной физики. М., 1955. Вып. 3. С. 37—78.
3. *Петрова С. С.* О. Хевисайд и развитие символического исчисления // Ист.-мат. исслед. 1985. Вып. 28. С. 98—102.
4. Математика XIX века. Чебышевское направление в теории функций... /Под. ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. М., 1987.
5. *Петрова С. С.* Дж. Буль и развитие символических методов в теории дифференциальных уравнений // Ист.-мат. исслед. 1985. Вып. 29. С. 88—102.
6. *Boole G.* On a general method of analysis // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1844. V. 134. P. 225—289.
7. *Ефимова Е. А.* О работах В. Рассела по символическому исчислению) // Историко-математические исследования. 1994. Вып. 35. С. 247—254.
8. *Boole G.* A treatise on differential equations. 2nd. ed., rev. Cambridge-London, 1865.
9. *Ващенко-Захарченко М. Е.* Символическое исчисление и его приложение к интегрированию линейных дифференциальных уравнений. Киев, 1862.
10. Dictionary of national biography. London, 1888. V. 15.
11. *Donkin W.* On certain theorems in the calculus of operations // Cambr. and Dubl. Math. J. 1850. V. 5. P. 10—18.
12. *Петрова С. С.* О работах Ч. Харгрева по символическому исчислению // Ист. и метод. ест. наук. М., 1986. Вып. 32. С. 148—159.
13. *Crofton M. W.* Theorems in the calculus of operations // Quar. J. of pure and appl. Math. 1879. V. 16. P. 323—329.
14. *Donkin W.* On the equations of Laplace's functions // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1857. V. 147. P. 1. P. 43—57.
15. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций / Пер. со 2-го англ. изд. М., 1949. Ч. 1.