

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абульханова К. А. О субъекте психической деятельности. М., 1973.
2. Абульханова-Славская К. А. Стратегия жизни. М., 1991.
3. Брушлинский А. В. Мышление и прогнозирование. М., 1979.
4. Брушлинский А. В., Поликарпов В. А. Мышление и общение. Минск, 1990.
5. Выготский Л. С. Умственное развитие детей в процессе обучения. М.—Л., 1935.
6. Выготский Л. С. Собрание сочинений: В 6 т. М., 1982. Т. 2.
7. Ломов Б. Ф. Методологические и теоретические проблемы психологии. М., 1984.
8. Ломов Б. Ф. Вопросы общей, педагогической и инженерной психологии. М., 1991.
9. Мышление: процесс, деятельность, общение. М., 1982.
10. Принцип системности в психологических исследованиях. М., 1990.
11. Психологический словарь. М., 1983.
12. Психология формирования и развития личности. М., 1981.
13. Рубинштейн С. Л. Бытие и сознание. М., 1957.
14. Рубинштейн С. Л. Проблемы общей психологии. М., 1973.
15. Тенденции развития психологической науки. М., 1989.
16. De Groot A. D. Unifying Psychology: A European View//New Ideas in Psychology. 1990. Vol. 8. № 3. P. 309—320.
17. Staats A. W. Unified Positivism and Unification Psychology//American Psychologist. 1991. № 9. P. 899—912.

К 20-летию Института психологии РАН

© 1992 г.

В. Ю. Крылов

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПСИХОЛОГИИ

В статье подводятся итоги работы Лаборатории математической психологии за 20 лет (1972—1992). Рассмотрены актуальные проблемы математической психологии: методологические проблемы, математические модели обучения, моделирование принятия решений в игре двух лиц с непротивоположными интересами, математическое моделирование субъективных пространств и др.

Ключевые слова: математическая психология, модель, многомерное шкалирование, кластерный анализ, теория игр, конечный и стохастический автоматы.

В Институте психологии РАН с 1972 г. специальной лабораторией исследуются проблемы применения математических методов в психологии. Математическая психология — молодая наука. Термин «математическая психология» впервые появился, по-видимому, в названии руководства по математической психологии в 1963 г. [1]. Лаборатория математической психологии в Институте — единственное в нашей стране научное подразделение этого профиля. Коллективу в свое время пришлось разработать вопросы методологии применения математических методов в психологии, новые методы обработки данных психологического эксперимента, математические и компьютерные модели психических явлений и процессов. В настоящей статье рассмотрены основные работы в области математической психологии, выполненные сотрудниками Лаборатории математической психологии Института психологии РАН.

ВОПРОСЫ МЕТОДОЛОГИИ. ПРЕДМЕТ, ОБЪЕКТ
И ОСНОВНОЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

В начале своего становления — а это было примерно 25 лет тому назад — математическая психология включала в свою проблематику лишь ограниченное количество психологических проблем. Задействовались теории, уровень разработки которых позволил в максимальной степени применить математические методы, причем в основном такие, которые к тому времени уже применялись для решения задач, возникающих в других науках. Таковы, например, теории: 1) статистического обнаружения сигналов, 2) передачи информации, 3) автоматического регулирования, 4) марковских цепей, 5) конечных и вероятностных автоматов и др.

Математическая психология развивалась как в направлении интенсификации, углубляя и развивая теории, относившиеся к ее проблематике в 60-х годах, так и в направлении экстенсификации, охватывая все новые области психологического знания. Так, по мнению Б. Г. Ананьева, «математизация современной психологии

распространялась на все ее разделы и дисциплины без какого-либо исключения» [2, с. 275]. Тем не менее современная математическая психология в значительной степени представляет совокупность разрозненных теорий различной степени общности и глубины разработки. Такое ее состояние делает актуальной задачу обоснования математической психологии, анализ развития основных проблем математической психологии, определение ее места и роли в системе психологических дисциплин, определение предмета, объекта и основного ее метода исследования и, наконец, построение идеальных объектов, анализом которых она занимается.

При рассмотрении объекта психологического изучения Б. Ф. Ломов выделял следующие уровни анализа [12]: 1) человек в системе общественных отношений; 2) деятельность и общение, т. е. когнитивная, регулятивная и коммуникативная функции психики; 3) отдельные психические процессы; 4) физиологические основы психических явлений.

По степени развитости логической структуры обычно выделяются следующие теории: эмпирические (описательные), гипотетико-дедуктивные, аксиоматизированные содержательные и формализованные.

В результате дифференциации психологического знания в настоящее время насчитывается несколько десятков психологических дисциплин, изучающих различные типы психических явлений, находящихся на различных этапах развития. В рамках психологии можно найти примеры теорий трех первых типов, однако основная масса психологических теорий носит сегодня либо описательный, либо гипотетико-дедуктивный характер.

Роль математизации психологического знания заключается в развитии логической структуры психологических теорий от описательных к гипотетико-дедуктивным и далее к аксиоматизированным содержательным. Математизация его является, таким образом, фундаментальной проблемой психологической науки, разработка которой способствует развитию теоретической психологии.

Прежде всего отметим двойственность положения математических методов в современной психологии. С одной стороны, математические методы, в частности математические модели, служат одним из средств познания психических явлений. С другой — задачей математической психологии является изучение уже построенных математических моделей, сравнение различных математических методов, применяемых в психологии. Ананьев отмечал, что в этой двойственности «объективно проявляется различие функционирования в научном познании операций с объектами и самих объектов. Экспериментальные или математические методы суть прежде всего сложные системы операций с объектами, которыми в психологии являются многообразные феномены поведения и психической деятельности. Вместе с тем для научного познания эти сложные системы сами являются гносеологическими объектами» [2, с. 276—277].

Таким образом, задача математической психологии — разработка и применение формального (математического) аппарата, пригодного для адекватного описания и моделирования систем, обладающих психическими свойствами (систем, использующих для своего функционирования во внешней среде какие-либо формы психического отражения), а также изучение самих математических моделей этих систем.

В соответствии с таким определением объектом исследования в математической психологии оказываются, во-первых, реальные естественные системы, обладающие психическими свойствами, и содержательные психологические теории, носящие описательный или гипотетико-дедуктивный характер, во-вторых, математические модели таких систем.

Заметим, что при таком понимании объекта математической психологии многие системы искусственного интеллекта, выступающие моделями естественных систем, включаются в объект математической психологии.

Инструментом изучения в математической психологии является метод математического моделирования. Было проведено уточнение классификации методов психологического исследования, предложенной Ананьевым при определении места

и роли моделирования (в частности, математического) в системе методов психологического исследования. Он разделяет методы психологического исследования на 1) организационные, 2) эмпирические, 3) обработки данных, 4) интерпретационные.

Методы моделирования Ананьев относит к эмпирическим наряду с методами наблюдения, экспериментальными, психодиагностическими, праксиметрическими и биографическими. В основу классификации положена идея о необходимости такой рабочей классификации методов исследования, которая «соответствовала бы порядку операций в научном исследовании, определенному целостному циклу современного психологического исследования» (там же, с. 296).

Последовательно проводя эту идею классификации методов психологического исследования, целесообразно выделить методы моделирования (математического, кибернетического, имитационного и др.) в особый класс по месту моделирования в системе методов психологического исследования. Поскольку предметом психологии являются процессы субъективного отражения объективной действительности, необходимые для регуляции поведения и деятельности, а реально при наблюдении, эксперименте других эмпирических методах психологического исследования в центре внимания ученого находятся лишь поведение субъекта и продукты его деятельности, то адекватным методом психологического исследования, очевидно, является (в значительной мере) априорная формулировка гипотез о механизмах субъективного отражения и последующая их проверка. Наиболее точным методом выдвижения и проверки гипотез служат формулировки гипотезы о механизме изучаемого явления в форме модели, наблюдение функционирования модели и сравнение поведения модели с поведением (наблюдаемым или фиксируемым в эксперименте) реального субъекта психической деятельности.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБУЧЕНИЯ

Особую роль в становлении математической психологии сыграла теория обучения. Математические модели обучения были среди первых достижений математической психологии. Математическая теория обучения, как отмечалось выше, в 50—60-х годах выделилась в обширный раздел математической психологии, активно развивавшейся в эти годы как в США, так и в нашей стране. Интересно, что математическая теория обучения в качестве одной из первых своих задач поставила и решила задачу построения объяснительной математической модели научения, т. е. теоретического вывода из возможно более простых посылок экспоненциального характера зависимости числа ошибок при научении от времени. К настоящему времени зависимости такого экспоненциального типа, аналогичные формуле Г. Эббингауза, получены в громадном числе экспериментов по обучению и забыванию для различных конкретных экспериментальных ситуаций. Суть найденных зависимостей заключается в том, что какая-либо величина, характеризующая качество обучения (например, число ошибок в данной пробе и т. п.) экспоненциально убывает при росте числа таких проб. Например, если q_n — вероятность ошибки в n -й пробе, то $q_n = Ae - \gamma n$, где γ — постоянная, характеризующая скорость убывания вероятности ошибки при росте числа проб, т. е. способность к обучению.

Первые объяснительные модели обучения — модели Бауэра, Спенса, Одли и обобщающая их модель Эстеса (см. [2]) — относятся к обучению (поведению) в ситуации двойного выбора. Они описывают, например, поведение животного в Т-образном лабиринте. Заметим, что поведение в условиях бинарного выбора в модели Бауэра моделируется цепью Маркова с пятью состояниями, причем граф переходов прямо соответствует форме Т-образного лабиринта.

Модель Спенса аналогична модели Бауэра, а модель Эстеса является обобщением модели Бауэра — Спенса и отличается от них тем, что имеет на каждой стороне Т-образного лабиринта не одно промежуточное состояние, а некоторое заданное их число. Наконец, предложенная Эстесом теория отбора стимулов [17]

(см. также [2, с. 400—432]) явилась обобщением практически всех моделей обучения такого типа и их содержательным обоснованием.

Отметим, что авторы рассмотренных моделей относят их к так называемым дескриптивным моделям, стремящимся к описанию фактического поведения индивида в эксперименте, противопоставляя их нормативным моделям, которые призваны описывать, как должен вести себя индивид, чтобы достичь цели эксперимента [2, с. 364—366]. Нам представляется такое противопоставление нормативной и дескриптивной моделей неоправданным. Дело в том, что реально иногда удается построить целый класс нормативных моделей, зависящих от каких-либо параметров и моделирующих нормативное поведение лишь для некоторой области допустимых значений параметров. Оказывается также, что для других значений параметров эти модели играют роль дескриптивных для ряда конкретных типов поведения индивида, наблюдаемых в эксперименте. Конкретные примеры таких моделей будут приведены ниже при описании предложенных нами моделей (алгоритмов) асимптотически оптимального поведения в ситуации вероятности выбора.

В те же годы, когда в США интенсивно развивалась дескриптивная теория обучения, в нашей стране велась разработка нормативного выбора. Задача построения нормативной модели поведения в ситуации вероятностного выбора была поставлена советским ученым М. Л. Цетлиным в 1961 г. В работе [15] он предложил правило поведения, позволяющее частично решить поставленную задачу (для случайных сред, в которых вероятность выигрыша хотя бы за одно действие не меньше половины). Это правило поведения было реализовано Цетлиным в виде специальной конструкции конечного автомата, получившего название автомата с линейной тактикой $L_{2n, 2}$.

Впервые полное решение поставленной задачи конструирования автомата, обладающего асимптотически оптимальным поведением в произвольных стационарных случайных средах, было получено автором настоящей работы в 1963 г. [9]. Предложено правило поведения, реализованное в виде конструкции стохастического автомата $K_{2n, 2}$, обладающего асимптотически оптимальным поведением в произвольной стационарной случайной среде.

Впоследствии автором было показано, что стохастический автомат $A_{2n, 2}^{\alpha, \beta}$, являющийся обобщением автомата $K_{2n, 2}$ (переходы в графе состояний при выигрыше с вероятностями не 1 и 0, а α и $1 - \alpha$, а при проигрыше с вероятностями не половина, а β и $1 - \beta$), для некоторых значений параметров α и β — нормативная модель поведения в ситуации вероятностного выбора, тогда как для других значений параметров α и β может служить дескриптивной моделью поведения, наблюдаемого в эксперименте [8]. Таким образом, на одном и том же математическом языке (языке конструкций стохастических автоматов) можно строить как нормативные, так и дескриптивные модели поведения в задаче вероятностного выбора.

Обсуждая соотношение между дескриптивной и нормативной моделями, Эстес писал: «Нормативная модель может рассматриваться как особый случай описательной. И действительно, В. Ю. Крылов в своем докладе на семинаре показал, что путем соответствующих изменений в инструктаже он мог так влиять на испытуемых, что они меняли свой паттерн выполнения задачи, а именно: от паттерна, прогнозируемого описательной моделью, переходили к паттерну, прогнозируемому нормативной моделью» [16, с. 73].

Сравнивая подходы к построению математической теории обучения в США и теории асимптотически оптимального поведения в стационарных случайных средах в нашей стране, отметим следующие особенности второй теории по сравнению с первой.

Во-первых, при моделировании поведения в случайных средах с самого начала рассматривалась более сложная задача многократно повторяющегося вероятностного выбора. *Во-вторых*, была поставлена и решена нетривиальная матема-

тическая задача построения нормативной модели асимптотически оптимального поведения. В-третьих, разработан специальный математический язык описания правила поведения посредством конструкции соответствующего конечного (М. Л. Цетлин) или стохастического (В. Ю. Крылов) автомата. В-четвертых, на едином математическом языке были построены как нормативные, так и дескриптивные модели принятия решений при вероятностном выборе. В-пятых, формулировка результата в виде конструкции конечного или стохастического автомата позволила применить эти же методы при моделировании коллективного и игрового поведения.

Хотя со временем была понята ограниченность автоматных моделей поведения, они сыграли важную роль в становлении математической психологии. Анализ ограниченности таких моделей для моделирования реального поведения людей при достижении поставленных ими целей и описанию возможных обобщений этих моделей, более полно отражающих специфику реального поведения, посвящена монография [10].

Задача поведения автоматов с линейной тактикой в игре двух лиц с ненулевой суммой была рассмотрена в работах [3, 11].

Впервые рассмотрена однородная игра многих одинаковых автоматов [4]. Этой работой было открыто новое направление в применении автоматных моделей: моделирование коллективного поведения при помощи автоматов, асимптотически оптимальных в стационарной случайной среде. Пример коллективного поведения автоматов авторы назвали игрой в размещения. В дальнейшем игра в размещения с учетом возможного объединения автоматов в коалиции была рассмотрена в работе [5].

МОДЕЛЬ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ В ИГРЕ ДВУХ ЛИЦ С НЕПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ ИНТЕРЕСАМИ

Как известно, наиболее интересные и сильные результаты в теории игр получены либо для двух лиц с нулевой суммой (теорема Дж. фон Неймана о существовании пары оптимальных смешанных стратегий для произвольной матрицы игры), либо для случая бескоалиционных игр многих лиц (теорема Нэша о существовании хотя бы одной точки равновесия в произвольной бескоалиционной конечной игре многих лиц) [13].

В наиболее интересном случае неантагонистических игр до сих пор нет даже удовлетворительного определения понятия цены игры (или, что то же самое, понятие цели игроков в такой игре).

Т. Н. Савченко попыталась экспериментально проанализировать поведение игроков в неантагонистической игре с целью построить адекватную математическую модель такого поведения. Полученный ею теоретический результат, описанный в работе [14], состоит в следующем.

Пусть игра двух лиц с ненулевой суммой (биматричная игра) задана при помощи двух матриц:

$$A = \|a_{ij}\| \text{ и } B = \|b_{ij}\|, \text{ где } i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Обозначим через $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ векторы смешанных стратегий соответственно 1-го и 2-го игроков. Обозначим через $m_1(\alpha, \beta)$ и $m_2(\alpha, \beta)$ математические ожидания выигрыша 1-го и 2-го игроков, если они применяют свои смешанные стратегии α и β соответственно. Каждый игрок, выбирая свою смешанную стратегию, влияет на выигрыш, который получают оба игрока.

Дж. фон Нейман доказал для игры двух лиц с ненулевой суммой существование таких смешанных стратегий, которые максимизируют гарантированный выигрыш каждого из игроков.

В экспериментах с конкретными играми двух лиц с ненулевой суммой было показано, что игроки применяли различные критерии. Например: 1) макси-

зацию своего выигрыша; 2) минимизацию выигрыша партнера; 3) максимизацию выигрыша партнера; 4) максимизацию суммы выигрышей обоих партнеров; 5) максимизацию разности своего выигрыша и выигрыша партнера и т. д. Ясно, что все приведенные примеры критериев описываются в терминах максимизации или минимизации каждым игроком заданной линейной комбинации выигрышей (своего и партнера) с фиксированными (своими для каждого игрока) коэффициентами линейной комбинации $f(\alpha, \beta) = h_1^i m_1(\alpha, \beta) + h_2^i m_2(\alpha, \beta)$, где $i = 1, 2$ — номер игрока.

В соответствии со сказанным в работе предложено следующее определение решения для игры двух лиц с противоположными интересами.

Пусть для каждого из игроков, участвующих в игре, определена линейная комбинация выигрышей всех игроков с фиксированными коэффициентами. Критерий (цель, которую стремится достичь данный игрок) определяется как максимизация или минимизация заданной линейной комбинации выигрышей. Игра предполагается бескоалиционной, т. е. каждый игрок выбирает свою стратегию независимо.

Решением игры будем называть множество смешанных стратегий всех игроков, которые соответствуют критериям, выбранным каждым из игроков. Естественно, что для заданной игры при некоторых выборах множества критериев игроков решение может существовать, а при других может не существовать.

В частности, теорема Дж. фон Неймана в этих терминах выглядит следующим образом: если задана игра двух лиц с нулевой суммой, т. е. $a_{ij} + b_{ij} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$), а в качестве критерия каждым из игроков выбрана максимизация своего (гарантированного) выигрыша, то всегда имеется пара смешанных стратегий, удовлетворяющая выбранным критериям (оптимальные стратегии, по Дж. фон Нейману).

В качестве примеров критериев, применяемых каким-либо игроком (например, 1-м в игре двух лиц с ненулевой суммой), могут служить следующие критерии:

- 1) $\max_{\alpha} \min_{\beta} f_1(\alpha, \beta)$, 2) $\max_{\alpha} \max_{\beta} f_1(\alpha, \beta)$,
- 3) $\min_{\beta} \max_{\alpha} f_1(\alpha, \beta)$, 4) $\min_{\alpha} \min_{\beta} f_1(\alpha, \beta)$.

В частности, для игры двух лиц стратегия максимального гарантированного выигрыша Дж. фон Неймана получается, если 1-й игрок выберет критерий $\max_{\alpha} \min_{\beta} f_1(\alpha, \beta)$, а 2-й — $\max_{\alpha} \max_{\beta} f_1(\alpha, \beta)$. Таким образом, определение решения игры (данное в [14]), является обобщением понятия решения игры, предложенного Дж. фон Нейманом. В работе [14] рассмотрены конкретные примеры игр и критериев для игры двух игроков с противоположными интересами. При этом для таких игр, как «Семейный спор» и «Дилемма узника», новым методом получены как все решения, найденные ранее, так и большое количество новых решений для пар критериев, не рассматривавшихся ранее.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СУБЪЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ (НЕМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД МНОГОМЕРНОГО ШКАЛИРОВАНИЯ)

В качестве общих требований к системному моделированию психических явлений Б. Ф. Ломов выдвигает требование учета их многомерности и иерархического строения. Наконец, он выражает надежду, что системный подход откроет возможность конкретно-научного анализа такой капитальной характеристики психических явлений, как субъективная форма их существования.

Задачей математического моделирования субъективных пространств было создание математической модели результатов различных форм психического отражения, учитывающей его системность и субъективный характер.

Важно отметить, что результаты единичных актов на каждом уровне образуют

систему образов восприятия, представлений, понятий и т. д. При этом системообразующий фактор определяется, с одной стороны, объективными связями между отражаемыми явлениями действительности, а с другой — отношением к ним субъекта, обусловленным необходимостью использования результатов отражения для организации им своего поведения, вообще — жизнедеятельности. Аналогичную целостность образуют также и различные подструктуры личности.

Система, как известно, характеризуется множеством своих элементов и связями, отношениями между ними. Именно последнее и обеспечивает ее целостность.

Простейшим и в то же время наиболее общим является отношение подобия, близости элементов системы между собой в соответствии с некоторым критерием. Одним из фундаментальных философских принципов является положение о том, что ни один предмет не представляет собою чего-либо совершенно отличного от всех других предметов, но он похож на них в каком-либо отношении. Однако структура критерия, определяющего то или иное отношение, может быть достаточно сложной.

Конкретизируя сказанное, мы будем в дальнейшем в качестве отношения между элементами такой системы рассматривать бинарное отношение различия элементов, получающееся в результате попарного их сравнения по какому-либо субъективному критерию. Оно, очевидно, обладает следующими двумя свойствами: различие между идентичными элементами отсутствует (равно 0) и различие симметрично. Такие свойства делают его аналогичным расстоянию в метрических пространствах. Напомним, что расстояние в метрическом пространстве определяется четырьмя свойствами — двумя описанными выше, а также еще двумя: если расстояние между элементами равно нулю, то элементы совпадают, а при его наличии выполняется так называемое неравенство треугольника. Заметим, что в математике рассматриваются и псевдометрические пространства, в которых для расстояний соблюдаются не все четыре аксиомы. Таким образом, отношение различия имеет свойства, аналогичные (а иногда и совпадающие) свойствам расстояния в метрических пространствах или в пространствах более общей природы (например, псевдометрических).

Этот факт делает естественным введение фундаментального для задач математической психологии понятия субъективного пространства [7].

Субъективным пространством будем называть множество результатов различных форм психического отражения или множество элементов структуры личности с введенным на этом множестве отношением, аналогичным расстоянию и интерпретируемым в содержательных терминах как та или иная степень различия элементов в смысле какого-либо субъективного критерия. Еще раз подчеркнем, что, рассматривая систему результатов психического отражения, в которой в качестве связи, отношения между элементами выступает отношение различия по какому-либо (субъективному) критерию, мы можем трактовать ее как пространство, в котором роль его точек играют элементы системы, а расстояния между ними — различия между элементами. Это возможно именно потому, что свойства отношения различия совпадают со свойствами расстояния в пространстве.

Введенное понятие субъективного пространства мы определяем как реально существующее у субъекта множество результатов психического отражения (в различных его формах) или множество элементов структуры личности с введенным субъектом отношением на этом множестве, имеющим двоякую (объективную и субъективную) детерминацию и интерпретируемым в содержательных терминах как та или иная степень различия или сходства элементов множества в смысле какого-либо субъективного критерия. Оно является реальным объектом теории субъективных пространств. Идеальным объектом в развиваемой нами теории является математическая модель субъективного пространства, представляющая собой математическое пространство, т. е. абстрактное множество элементов (точек пространства) с заданными отношениями между элементами. При этом предполагается, что точки пространства соответствуют элементам реального субъективного пространства (т. е. образам восприятия, представлениям, понятиям,

элементам структуры личности), а отношение между ними — реальным субъективным отношениям между элементами.

Для целей математического моделирования восприятия в рамках психофизических задач разработаны методы многомерного шкалирования. Они служат решению задач представления образов стимулов с помощью точек математического пространства, расстояния, в котором моделируют субъективные различия в восприятии. Многомерное шкалирование, впервые предложенное У. Торнгеном (1952 г.), интенсивно развивается в работах Р. Шепарда, С. Кумбса, А. Тверского, Д. Крускала и многих других авторов.

Основная его гипотеза применительно к исследованию восприятия психофизическими методами формулируется следующим образом. Каждый стимул из предъявляемого набора характеризуется множеством признаков. Предполагается, что при оценке различий субъект учитывает лишь небольшое их число. Задача многомерного шкалирования состоит в том, чтобы на основе его суждений о межстимульных различиях выявить объективные признаки стимулов (оси сенсорного пространства).

В настоящее время предложено большое число различных вариантов многомерного шкалирования. Основным и в некотором смысле простейшим следует считать метод метрического многомерного шкалирования в евклидовом пространстве.

Процедура метрического многомерного шкалирования состоит в следующем. В результате предъявления субъекту n стимулов $S_1, \dots, S_n$ получается матрица D попарных различий D_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) между стимулами S_i, S_j . Задача многомерного шкалирования состоит формально в построении математического пространства (X -пространства) возможно меньшей размерности r и отыскании координат точек r_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в r -мерном X -пространстве. Точек, являющихся образами стимулов, так, чтобы матрица d расстояний d_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) между точками x_i и x_j вычисленных в соответствии с геометрией X -пространства, была близка в смысле некоторого заданного критерия $I(D, d)$, получившего в теории многомерного шкалирования название стресса, к исходной матрице различий D .

Обычно в качестве X -пространства выбирается евклидово пространство, в связи с чем условия, налагаемые на различия D_{ij} , получаемые в эксперименте, должны строго соответствовать аксиомам расстояния в евклидовой геометрии, т. е. условиям рефлексивности, симметричности и неравенству треугольника. Однако экспериментально установлено, что в ряде психологических исследований с использованием прямого метода выявления межстимульных различий получаемые различия D_{ij} не удовлетворяют некоторым аксиомам расстояния в метрическом пространстве, в частности неравенству треугольника. Возникает, таким образом, задача построения варианта метода многомерного шкалирования, адекватно моделирующего такие данные.

Для этих целей Р. Шепард (1962 г.) предложил неметрический метод многомерного шкалирования. При этом методе в качестве моделирующего X -пространства также выбирается метрическое пространство, однако требование приближенного равенства между расстояниями в X -пространстве и различиями D_{ij} заменяется условием монотонного соответствия между d_{ij} и D_{ij} , т. е. соответствия, сохраняющего их ранговые порядки.

Преимущество неметрического метода Р. Шепарда в том, что он применим к данным, определенным с точностью лишь до рангового порядка. Однако в случае, когда исходные межстимульные различия не являются ранговыми величинами, но и не удовлетворяют всем аксиомам метрики, неметрический вариант многомерного шкалирования, сохраняя ранговые порядки, нарушает соответствие между величинами, иначе представление метрических метрическими было бы, очевидно, невозможно.

Поскольку нет никаких оснований игнорировать численные значения различий,

полученных в эксперименте, в тех случаях, когда для них нарушаются те или иные аксиомы метрики, возникает задача построения разновидности метрического метода многомерного шкалирования.

Опишем метод математического моделирования субъективных пространств. Процесс исследования субъективного пространства предложенным методом можно представить в виде последовательности пяти этапов, начинающихся определением конкретного субъективного пространства, подлежащего исследованию. Пусть имеется множество объективно существующих ситуаций δ , т. е. $\Sigma = \{\delta\}$. Это множество может быть конечным, счетным или несчетным. Пусть в результате какой-либо формы психического отражения конечного подмножества $\Sigma' \subset \Sigma$, где $\Sigma' = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ субъект продуцирует результаты отражения $S_1, \dots, S_n$ ситуаций $\delta_1, \dots, \delta_n$, которые мы будем называть их субъективными образами. Таким образом, $S_1, \dots, S_n$ являются элементами субъективного пространства рассматриваемого субъекта. Пусть экспериментальная процедура состоит в том, что он, основываясь на некотором сформированном критерии, оценивает различия между субъективными образами ситуаций S_i и S_j ($i, j = 1, \dots, n$). Построением матрицы D_{ij} заканчивается первый этап математического моделирования субъективного пространства образов ситуаций.

Перейдем к анализу величин D_{ij} . Предположим, что оценки субъективных различий D_{ij} являются вещественными неотрицательными числами, удовлетворяющими аксиомам Ψ -метрики, а именно: образы идентичных ситуаций неразличимы и различие между любыми двумя ситуациями симметрично.

Заметим, что если бы были соблюдены остальные (еще две) аксиомы метрического пространства, то в качестве математической модели субъективного пространства (X -пространства) естественно было взять евклидово пространство. В рассматриваемом же случае, когда известно лишь, что выполнены аксиомы Ψ -метрики, необходимо выбрать такое пространство, которое не требовало бы в общем случае выполнения всех четырех аксиом метрического пространства, а лишь двух аксиом Ψ -метрики; но если для D_{ij} все они оказываются реализованными, было бы обычным евклидовым. Указанным требованиям удовлетворяет псевдоевклидово пространство. Таким образом, в качестве математической модели субъективного пространства в случае Ψ -метрики будем выбирать вещественное псевдоевклидово X -пространство.

Псевдоевклидово X -пространство точек $\bar{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ir})$ размерности r характеризуется тем, что это линейное вещественное пространство, в котором квадрат расстояния d_{ij} между точками $\bar{x}_i$ и $\bar{x}_j$ вычисляется по формуле

$$d_{ij}^2 = \sum_{k=1}^r \epsilon_k (x_{ik} - x_{jk})^2,$$

где величины ϵ_k могут принимать значения $\epsilon_k = \pm 1$. Таким образом, вещественное псевдоевклидово пространство характеризуется размерностью r и набором чисел $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r$, принимающих значения ± 1 , называемым сигнатурой псевдоевклидова пространства. Заметим, что в частном случае, когда $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_r$, мы имеем обычное евклидово r -мерное X -пространство.

Нами в качестве критерия соответствия был предложен критерий

$$I(D, d) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} (D_{ij}^2 - d_{ij}^2)^2.$$

Критерий $I_k(D, d)$ принимает всегда вещественные неотрицательные значения при любых возможных d_{ij} , вычисленных в псевдоевклидовом пространстве.

Далее предлагается следующая процедура построения конфигурации точек в вещественном псевдоевклидовом пространстве и определения размерности пространства r и его сигнатуры. Сначала выбираются два двумерных пространства:

евклидово (с сигнатурой) и псевдоевклидово (с сигнатурой). В каждом из этих двух пространств градиентным методом ищется минимум критерия и соответствующая конфигурация точек. Двумерной моделью субъективного пространства считается то из двух пространств, у которого значение критерия для построения конфигурации точек минимально. Затем в качестве трехмерного пространства выбираются два X -пространства, получающиеся добавлением третьей евклидовой и псевдоевклидовой оси к уже выбранному двумерному пространству. Снова методом градиентов ищется конфигурация точек в трехмерном пространстве и затем из двух трехмерных псевдоевклидовых пространств выбирается то, у которого значения критерия оказываются наименьшими. Далее этот процесс продолжается для возрастающих значений размерности $r=2, 3, 4 \dots$. Выбор размерности моделирующего X -пространства (с уже определенной сигнатурой) производится на основе разумного компромисса между значениями критерия, которые убывают в зависимости от размерности пространства, и содержательной интерпретируемостью осей пространства для конкретного субъективного пространства.

Наконец, нами предложен новый метод многомерного шкалирования нечетких оценок различий.

Задача многомерного шкалирования в этом случае может быть сформулирована следующим образом. Необходимо в r -мерном пространстве расположить n точек таким образом, чтобы расстояние между всеми парами точек давали максимально возможное значение соответствующей функции принадлежности для лингвистической переменной «расстояние». Чтобы найти такую конфигурацию точек, необходимо найти минимум функционала соответствия

$$I_z = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} (1 - \mu_{D_{ij}}(d_{ij}))^2.$$

Очевидно, что значение функционала соответствия зависит от способа вычисления расстояния между точками, т. е. от геометрии моделирующего пространства.

Разработанный метод математического моделирования субъективных пространств был применен к анализу субъективного пространства представлений о временной структуре жизненного пути личности, субъективного пространства ее ценностных ориентаций, субъективного пространства восприятия плоских фигур и трехмерных тел вращения для исследования динамики гипотез при решении задач идентификации понятий и т. д.

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РАЗБИЕНИЯ НА КЛАССЫ В МЕТОДЕ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА И В МЕТОДЕ АНАЛИЗА ЛАТЕНТНЫХ СТРУКТУР

Метод кластерного анализа состоит в построении полного дерева кластеров, начиная с помещения каждого объекта в самостоятельный кластер и кончая объединением всех объектов в один общий кластер. При этом на каждом новом уровне происходит объединение пары кластеров, которые обладают минимальным межкластерным расстоянием. Расстояние между двумя кластерами вычисляется как среднее расстояние между объектами, входящими в эти кластеры:

$$b_{ij} = \frac{1}{N_i N_j} \sum_{x_k \in X_i} \sum_{x_p \in X_j} d(x_k, x_p).$$

Здесь $d(x_k, x_p)$ — соответствующий элемент исходной матрицы различий между объектами; N_i и N_j число объектов в соответствующих кластерах.

Одной из главных проблем кластерного анализа является проблема определения естественного числа кластеров, на которые может быть разбито исходное множество объектов.

В используемом нами методе иерархического кластерного анализа для опре-

деления естественного числа кластеров, на которые может быть разбита совокупность объектов, а возможно, и для определения более «тонкой» структуры применялся следующий критерий. На каждом уровне иерархической кластеризации вычислялась оценка разбиения множества объектов на данное число кластеров. В основу формулы для вычисления этой оценки была заложена идея физической плотности или, более точно, объема пространства, занимаемого данным множеством объектов. Для каждой пары кластеров оценивалась степень их внутренней связности относительно связности друг с другом. Для этого вычислялось среднее внутрикластерное расстояние для каждого кластера из заданной пары:

$$a_i = \frac{1}{N_i(N_i - 1)} \sum_{x_k \in X} \sum_{x_p \in X} d(x_k x_p).$$

При этом если $N_i = 1$, т. е. в кластере всего один объект, то

$$a_i = \min_{x_j} (d(x_i x_j)),$$

а если в кластере больше одного элемента, но все различия между ними равны нулю, то

$$a_i = \frac{1}{N_i} \sum_{x_k \in X} \min_{x_p} d(x_k, x_p).$$

Данная формула отражает аналогию с объемом пространства, занимаемого одним объектом, и учитывает, что в рассматриваемом случае как бы в одной точке пространства находится объект с большей «удельной плотностью».

В качестве оценки связности берется отношение среднего внутрикластерного расстояния к межкластерному.

Оценка полного разбиения вычисляется следующим образом:

Минимум значения функции S определяет наилучшее разбиение множества объектов на кластеры, а локальные минимумы — под- и надструктуры.

$$S = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \max \Pi_{ij}, \text{ где } \Pi_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2b_{ij}}.$$

Аналогичная оценка качества разбиения на классы разработана для анализа латентных классов (А. В. Дрынков, Т. Н. Савченко).

СОВМЕСТНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО ШКАЛИРОВАНИЯ И КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА

Совместное использование этих двух методов анализа данных может предоставить возможность решать более серьезные методологические проблемы экспериментального исследования в области поведенческих наук. Такой подход состоит в поиске подгрупп испытуемых, для которых возможно было бы обнаружение универсального представления, но самостоятельного для каждой из подгрупп.

Цель исследования — установление структуры субъективного отражения множества объектов, оцениваемых испытуемым. Она может быть достигнута с помощью последовательного применения кластерного анализа и многомерного шкалирования. Суть стратегии состоит в том, что если не удастся получить удовлетворительного решения методом многомерного шкалирования всей матрицы различий между объектами, то целесообразно провести ее кластерный анализ, после чего, в случае выделения естественных кластеров, отдельно шкалировать межкластерные расстояния и расстояния между элементами внутри каждого кластера. Эта же стратегия может быть вновь применена к матрице расстояний

внутри каждого из кластеров. В том случае, если многомерное шкалирование полной матрицы не дает хорошего результата и не удается выделить кластеры, целесообразно вернуться к процедурам получения исходных данных или подобрать другие методы кластерного анализа и многомерного шкалирования. Данный подход был предложен и реализован А. В. Дрынковым [6].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в развитии математической психологии можно выделить два направления: создание математических моделей и разработку методов анализа данных психологических исследований. В исследованиях сотрудников Лаборатории математической психологии РАН представлены оба эти направления. В статье описаны только некоторые из теоретических исследований сотрудников. Работа по практическому применению предложенных методов в психологических исследованиях требует совместных усилий психологов, математиков, социологов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ананьев Б. Г. О проблемах современного человекознания. М., 1977.
2. Атkinson Р., Бауэр Г., Кротерс Э. Введение в математическую теорию обучения. М., 1969.
3. Варшавский В. И. Коллективное поведение автоматов. М., 1973.
4. Гинзбург С. П., Крылов В. Ю., Цетлин М. Л. Об одном примере игры многих одинаковых автоматов//Автоматика и телемеханика. 1964. Т. 25. № 5. С. 668—672.
5. Головина Г. М., Крылов В. Ю. Коалиционный вариант игры в размещения многих автоматов//Математические методы в исследованиях индивидуальной и групповой деятельности. М., 1990. С. 139—148.
6. Дрынков А. В. Многомерное шкалирование и кластерный анализ: совместное применение//Математические методы в исследованиях индивидуальной и групповой деятельности. М., 1990. С. 164—177.
7. Крылов В. Ю. Геометрическое представление данных в психологических исследованиях. М., 1990.
8. Крылов В. Ю. Нормативные модели принятия решения при вероятностном выборе//Нормативные и дескриптивные модели принятия решений. М., 1981. С. 39—46.
9. Крылов В. Ю. Об одном стохастическом автомате, асимптотически оптимальном в случайной среде//Автоматика и телемеханика. 1963. № 9. С. 1226—1228.
10. Крылов В. Ю., Морозов Ю. И. Кибернетические модели и психология. М., 1984.
11. Крылов В. Ю., Цетлин М. Л. Об играх автоматов//Автоматика и телемеханика. 1963. № 7. С. 975—987.
12. Ломов Б. Ф. Психологическая наука и общественная практика. М., 1973.
13. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М., 1990.
14. Савченко Т. Н. Моделирование принятий решений в игре двух лиц с непротивоположными интересами//Психол. журн. 1987. Т. 8. № 5. С. 142—146.
15. Цетлин М. Л. О поведении конечных автоматов в случайных средах//Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22. № 10. С. 80—96.
16. Эстес У. К. Математические и психологические аспекты теории и исследований в области принятия решений. М., 1981. С. 66—74.
17. Estes W. K. A random walk modal choice behaviour//Mathematical methods in social sciences. Stanford, 1962. P. 265—276.

Политическая психология

© 1992 г. И. Г. Дубов, С. Р. Пантеев

ВОСПРИЯТИЕ ЛИЧНОСТИ ПОЛИТИЧЕСКОГО ЛИДЕРА

Анализируется структура восприятия политических лидеров в массовом сознании. Выделены основные личностные характеристики, с помощью которых массовое сознание описывает любых политических лидеров и производит первичную оценку конкретных государственных деятелей. Приводится оценка консерватора, демократа, радикала и др., данная политологами. Она позволяет реконструировать представления о стандартах, которым должны соответствовать политики указанных типов.

Ключевые слова: психосемантика, политический лидер, массовое сознание, менталитет, типажи, имидж.

Радикальные преобразования общества и необходимость учета общественного мнения при принятии любых решений обуславливают повышенный интерес к проблеме оценки личности политических деятелей их избирателями. В связи с этим чрезвычайно важен анализ процессов восприятия политических лидеров различными слоями населения. Знание о представлениях людей относительно конкретного политика позволяет определять основные ожидания населения, связанные с его деятельностью, а также границы, за которыми поступки и решения лидеров могут вызвать неприятие проводимого ими курса и резкую смену настроений в обществе.

В литературе, посвященной оценкам политических лидеров, основное внимание уделяется характеристикам, связанным с их политическими взглядами. Аналитиков прежде всего интересует, относится данный лидер к консерваторам или он склонен к реформам, придерживается либеральной ориентации или близок к социал-демократам, радикален в своих взглядах или является умеренным.

Вместе с тем немаловажное значение для понимания государственного деятеля имеют и его сугубо личностные характеристики: ответственность, хитрость, уверенность в себе и др. Для правильного формирования имиджа политического лидера необходимо установить, какие из них представляются избирателям наиболее значимыми, а также определить те его действия, которые, не согласуясь с представлениями о личности данного политика, будут восприняты как совершённые в результате внешнего давления или под влиянием аффекта.

Для проведения конкретных исследований, связанных с оценкой особенностей политических деятелей, требуются различные наборы личностных характеристик, соответствующие специфике рассматриваемых проблем. Однако указанное обстоятельство вовсе не снижает интереса к базовым, универсальным личностным чертам, выделяемым массовым сознанием в качестве важнейших для государственных деятелей любого уровня и любой политической ориентации. Выявление таких